И.А. Лепешинский

ГАЗОДИНАМИКА ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(государственный технический университет)

И.А. ЛЕПЕШИНСКИЙ

ГАЗОДИНАМИКА ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Допущено
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности
«Авиационные двигатели
и энергетические установки»
направления подготовки дипломированных специалистов
«Двигатели летательных аппаратов»

Москва
Издательство МАИ
2003

ББК 22.3.5
Л 48

Федеральная целевая
программа «Культура России»
(подпрограмма «Поддержка полиграфии и книгоиздания России»)

Л48 **Лепешинский И.А.** Газодинамика одно- и двухфазных течений в реактивных двигателях. — М.: Изд-во МАИ, 2003. — 276 с.: ил.

Изложены основы газодинамики однофазных и двухфазных течений на основе одномерных моделей. С использованием системного подхода рассмотрены свойства жидкостей и газов, параметры, характеризующие состояние и процессы в газодинамической системе; сформулированы алгоритмы построения математических моделей, способы решения задач и анализа течений в основных элементах реактивных двигателей.

Для студентов, аспирантов и инженеров, изучающих газодинамику и использующих ее результаты в своей работе.

Л $\frac{2203050000 - 526}{094\,(02) - 03}$ ББК 22.3.5

ISBN 5—7035—1349—9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагаются основы гидрогазодинамики, необходимые для последующего изучения курсов “Лопаточные машины”, “Теплопередача”, “Теория реактивных двигателей”, “Испытание и регулирование реактивных двигателей”, составляющих основу специальностей студентов факультетов двигателей летательных аппаратов авиационных вузов.

Учебник соответствует программе курса “Прикладная гидрогазодинамика”, изучаемого в течение двух семестров, и охватывает материал, соответствующий первому семестру, а также содержит раздел, посвященный двухфазным течениям, который читается только для некоторых специальностей во втором семестре.

Основу книги составляют лекции автора, читаемые на факультете “Двигатели ЛА” Московского государственного авиационного института, содержание и логика построения которых сложились под несомненным влиянием учителей-профессоров этого института Г.Н. Абрамовича и О.С. Сергеля.

Материал книги будет полезен всем изучающим основы газовой динамики, в особенности для первого знакомства с этой дисциплиной.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту — профессору, доктору технических наук Д.С. Ковнеру за полезные советы, касающиеся вопросов построения курса; Н.М. Федоровой, А.В. Ципенко и аспирантам А.В. Воронецкому, А.В. Кучинскому, А.А. Яковлеву, С.С. Янышеву, оказавшим неоценимую помощь в оформлении книги.

1. ЦЕЛИ, ЗАДАЧИ И ОБЪЕКТ ИЗУЧЕНИЯ

1.1. Гидрогазодинамика

Гидрогазодинамика — наука, изучающая законы поведения в условиях как равновесия, так и движения ***жидкостей и газов*** с учетом их силового, массового и энергетического взаимодействия с твердыми поверхностями, жидкостями или газами.

Термин "жидкость" используется в курсе как для обозначения класса веществ, объединяемых общим свойством легкоподвижности (текучести), так и капельных жидкостей. Капельные жидкости отличаются свойством несжимаемости.

Термин "газ" используется для обозначения сжимаемых жидкостей.

Под свойством ***сжимаемости*** понимается способность вещества легко изменять свой объем.

Под свойством ***легкоподвижности*** понимается способность вещества легко изменять свою форму.

Жидкости и газы широко распространены в природе и часто используются в науке и технике в качестве рабочего тела.

1.1.1. Рабочее тело. Вещество или совокупность веществ, посредством которых осуществляется обмен энергий, преобразование энергии из одной формы в другую или в работу и обратно, называется *рабочим телом*.

В реактивных двигателях жидкостное (газовое) рабочее тело используется для создания силы тяги, получения работы, смазки, охлаждения и других целей.

1.1.2. Почему гидрогазодинамика выделилась в самостоятельную дисциплину. Гидрогазодинамика является частью раздела механики сплошных сред, являющегося, в свою очередь, частью раздела механики общего курса физики. Что выделило гидрогазодинамику в самостоятельную дисциплину? Специфические свойства рабочего жидкостного тела, такие как текучесть, сжимаемость и вязкость. Наличие этих свойств у жид-

кости приводит к появлению дополнительной по сравнению с твердым телом деформационной формы движения. Как известно, твердое тело характеризуется поступательной и вращательной формами движения. Для описания поведения жидкости необходимо учитывать еще и деформационное движение.

Это обстоятельство не позволяет непосредственно применять физические законы к движению жидкости, необходимо их уточнение с учетом всех свойств жидкости.

1.1.3. О прикладном характере изучаемого курса. Прикладной характер курса означает, что целью изучения курса являются не только физические законы поведения жидкости, но и способы решения практических задач инженерными методами. Суть этой прикладной направленности можно выразить так:

физические законы — математические модели — алгоритмы — программы — решения — анализ.

Физические законы имеют важнейшее значение, являясь основой для построения моделей и анализа течения.

1.1.4. Состав и разделы курса. Курс включает в себя гидростатику, кинематику, динамику.

Гидростатика изучает равновесие жидкостей и тел, в них погруженных; ***кинематика*** изучает движение жидкостей без учета определяющих движение взаимодействий; ***динамика*** изучает движение жидкостей с учетом взаимодействия с твердыми телами, жидкостями и окружающей средой. Динамика состоит из двух разделов: ***гидродинамики***, изучающей законы движения несжимаемой жидкости, и ***газовой динамики***, изучающей поведение сжимаемого газа.

1.1.5. Значение гидрогазодинамики. Гидрогазодинамика является основой курсов теории двигателей, лопаточных машин, а также энергетических установок. На ее основе рассчитываются гидравлические и топливные системы, системы смазки, управления и охлаждения. Организация испытаний различных энергетических установок, изучения режимов полета летательных аппаратов также требует знания гидрогазодинамических законов.

1.2. Цели и задачи курса

Основная цель данного курса — научить анализу поведения жидкостей и газов в реактивных двигателях, энергетических

установках и их элементах, а также методам и способам расчета процессов, определяющих поведение рабочего тела.

Для достижения этих целей необходимо изучить:

— свойства жидкостей,

— основные физические законы, определяющие состояние и поведение жидкости,

— способы построения математических моделей,

— методы приближенного анализа и расчета газодинамических процессов в основных элементах двигателя,

— принципы и законы моделирования,

а также освоить ряд конкретных наиболее употребительных моделей.

1.3. Объект изучения

Объектом изучения будет ***поведение*** жидкостного (газового) рабочего тела в условиях обмена массой, энергией, количеством движения с окружающей средой, а также взаимодействия с твердыми поверхностями и жидкостями или газами.

Несмотря на то, что нас будут интересовать конкретные гидрогазодинамические устройства (диффузоры, сопла, форсунки, камеры сгорания и т. п.), все законы поведения (движения) жидкости могут применяться только к жидкости, а не к устройству. Хотя на установившемся газодинамическом жаргоне будет звучать: “рассчитать сопло”, “рассчитать форсунку” и т. д.

Поэтому поведение рабочего тела необходимо изучать в ***системе.*** С этой целью при рассмотрении различных газодинамических задач выделяют окружающую среду и гидрогазодинамическую систему, к которой затем применяют физические законы.

1.4. Гидрогазодинамическая система и окружающая среда

1.4.1. Система. ***Гидрогазодинамическая система,*** или ***система,*** — это совокупность материальных тел (элементов жидкости) со связями между ними, заключенных внутри мысленно выбранных границ (контрольной поверхности). Остальная часть материальных тел, не вошедших в систему, называется ***окружающей средой.***

Если в первом случае (система) материальными телами являются только элементы жидкости, то во втором (окружающая

среда) это и элементы жидкости, и твердые поверхности взаимодействия.

Система определяется *структурой* и *поведением* (функционированием).

Поведение системы характеризуется *состоянием* и *взаимодействием* с окружающей средой.

При рассмотрении поведения жидкости в системе окружающая среда мысленно отделяется от системы, а ее действие на систему учитывается соответствующим *внешним* по отношению к системе массовым, импульсным (силовым) и энергетическим взаимодействием.

1.4.2. Параметры состояния. Равновесная и неравновесная, стационарная и нестационарная системы. Состояние системы, при котором параметры в ее различных частях одинаковы, называется *равновесным*, в противном случае — *неравновесным*.

Реальные системы никогда не бывают равновесными. Если параметр состояния обозначить через Π_i, то характеристикой равновесности состояния системы может служить *критерий неравновесности* состояния системы

$$K_{\Delta\Pi_i} = \frac{\Delta\Pi_i}{\Pi_i}, \tag{1.1}$$

где $\Delta\Pi_i$ — разница параметра Π_i в двух точках системы.

Понятие равновесной системы как предельного случая ее состояния является весьма удобным, так как для ее характеристики можно использовать вместо поля каждого параметра его единственное значение.

Система называется *стационарной*, если параметры состояния не зависят от времени, в противном случае система является *нестационарной*.

1.4.3. Процесс. Изменение состояния системы называется *процессом*. Причиной изменения состояния является либо *взаимодействие системы с окружающей средой*, либо, в случае ее изолированности от окружающей среды, само *неравновесное состояние*, из которого система стремится перейти к равновесному состоянию.

1.4.4. Обратимый и необратимый процессы. Изменение состояния — процесс может происходить либо *обратимо*, или *рав-*

новесно, либо *необратимо* (*неравновесно*) [3]. Причиной необратимости процесса является внутреннее трение в системе.

Необратимыми являются процессы, протекающие при конечной разности параметров, например, передача тепла при конечной разности температур, процессы с конечной скоростью их протекания. Конечная разность параметров и быстрое протекание процесса создают неравновесное состояние системы, при котором и проявляется внутреннее трение в системе. Необратимость процесса снижает эффективность использования энергии рабочего тела в системе.

В природе не существует обратимых процессов. Однако модель обратимого процесса имеет важное значение. Во-первых, в ряде случаев реальные процессы могут быть близки к обратимым, во-вторых, обратимые процессы могут использоваться как предельные случаи и в этом смысле оценивать степень эффективности необратимых процессов.

1.5. Взаимодействие системы и окружающей среды

Под *массовым взаимодействием* понимается изменение массы системы путем обмена с окружающей средой массой. Системы, обменивающиеся массой, называются *открытыми*, не обменивающиеся — *закрытыми*. При этом в процессе обмена массой системы и окружающей среды масса системы может оставаться постоянной. В курсе рассматриваются в основном открытые системы.

Под *импульсным*, или *силовым, взаимодействием* понимается *изменение* количества движения системы в результате силового воздействия на систему окружающей среды (или системы на окружающую среду).

Под *энергетическим взаимодействием* понимается *изменение* энергии системы в результате обмена энергией между системой и окружающей средой или совершения работы (либо системы над средой, либо среды над системой).

Системы, сохраняющие массу, количество движения или энергию неизменными, называются *изолированными* по соответствующей субстанции. В частности, различают системы массово-изолированные, импульсно-изолированные, энергетически изолированные.

1.6. Структура системы

Для характеристики структуры гидродинамической системы используются следующие понятия [2].

Жидкая частица — мысленно выделенная весьма малая масса dm жидкости неизменного состава, по объему сравнимая с физически малым объемом dV. При движении жидкая частица может изменять объем и форму, но заключенная в ней масса жидкости остается неизменной, а макроскопические параметры отождествляются со свойствами потока в точке пространства, представляемого жидкой частицей.

Жидкий объем — мысленно выделенный объем, состоящий из одних и тех же частиц. При движении жидкий объем может деформироваться, т. е. изменять объем и форму, но сохраняет постоянную массу.

Контрольная поверхность — поверхность, ограничивающая систему.

Жидкий контур — контур в пространстве, состоящий из одних и тех же жидких частиц (частиц с одинаковыми свойствами).

1.7. Классификация задач прикладной гидрогазодинамики

Задачи ПГГД классифицируются:

а) по объекту взаимодействия системы:

1) взаимодействие с твердыми поверхностями. ***Внутренние задачи*** — течение в каналах, ***внешние задачи*** — обтекание тел;

2) взаимодействие с жидкостью. ***Струйные задачи*** — течение жидкости внутри другой жидкости или этой же жидкости, но с отличными параметрами.

б) по постановке:

1) ***прямая задача***. Заданы: параметры окружающей среды, геометрия системы. Определить: параметры рабочего тела в каждой точке системы.

2) ***обратная задача***. Заданы: параметры окружающей среды, параметры рабочего тела в каждой точке системы. Определить: геометрию системы.

1.8. Способы решения задач прикладной гидрогазодинамики и анализа течений. Алгоритм построения моделей

Решение задач и анализ течений проводятся на основе *математических моделей*, причем инженерный анализ касается не самой реальной задачи, а модельной задачи.

Естественно иметь такие модели, которые хорошо отражают поведение реальных рабочих тел в условиях реальной задачи.

Можно указать примерный алгоритм, т. е. последовательность действий, позволяющую строить математические модели.

1. Определяется *рабочее тело*, т. е. формулируются гипотезы, устанавливающие его свойства и параметры, характеризующие его состояние.

2. Определяется система, т. е. устанавливаются и описываются ее *элементы, их свойства и связи* между ними.

3. Определяются *формы движения* материи и *степени свободы* системы, учитываемые при формулировании модели.

4. Для определенной выше системы записываются фундаментальные физические законы, выражающие *условия сохранения массы*, *импульса* (*количества движения*) и *энергии*.

5. Записывается *определяющее уравнение*, выделяющее конкретное рабочее тело из всего класса рабочих тел в класс, обладающий необходимой общностью свойств (например, газы или жидкости). Определяющим уравнением может быть, например, уравнение состояния.

6. Устанавливается уравнение *качества процесса изменения состояния* как альтернатива между обратимым и необратимым процессом.

7. Записываются все необходимые дополнительные законы и соотношения, позволяющие рассчитать процесс изменения состояния при принятом условии. Например, условие изоэнтропийности течения для газа, если процессы считаются обратимыми, и т. п.

8. Следует отметить, что для решения поставленной (конкретной) задачи необходимо задать дополнительные условия, определяющие конкретные особенности данного единичного явления, выделяющие его из всего класса однородных явлений. Эти условия называются *условиями однозначности*, или *краевыми условиями*.

Модели можно рассматривать как идеализированное или приближенное описание фактически существующих зависимостей межу конструктивными и рабочими характеристиками уст-

ройства, с одной стороны, и фундаментальными законами физики — с другой.

Каждая модель позволяет решать ограниченный круг частных задач, определяемый теми свойствами рабочего тела и процессами взаимодействия, а также гипотезами и допущениями, которые учитывались при формулировке модели.

1.9. Методы решения задач

Различают следующие методы решения задач:

— аналитические, т. е. решение уравнений математической модели вместе с условиями однозначности;

— метод моделирования или научного эксперимента, основанный на использовании математической модели и теории подобия;

— получение результатов путем проведения непосредственного эксперимента на натурном объекте.

2. ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. СПЕЦИФИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

2.1. Молекулярное строение

Движение жидкостей и газов по сравнению с твердыми телами определяется особенностью их молекулярного строения, которое проявляется в специфических свойствах: легкоподвижности, вязкости, сжимаемости.

Твердые тела. Их молекулы располагаются на очень малых расстояниях друг от друга и совершают колебания. Силы взаимодействия между ними очень велики и возрастают пропорционально изменению расстояния. Поэтому твердые тела сопротивляются сжатию, растяжению, изгибу, кручению. Следствием такого строения является отсутствие легкоподвижности (способности легко изменять форму). Но имеется возможность восприятия сосредоточенной силы, приложенной к одной точке.

Капельные жидкости. Их молекулы располагаются на больших расстояниях, чем в твердых телах, а силы взаимодействия между молекулами значительно меньше. Это позволяет молеку-

лам свободно перемещаться в пространстве, совершая колебания около подвижных центров равновесия.

Газы. Их молекулы располагаются на еще больших расстояниях друг от друга, так что силы взаимодействия между ними становятся пренебрежимо малыми. Однако здесь имеет место интенсивное хаотическое движение молекул, испытывающих взаимные соударения.

Следствием такого молекулярного строения жидкостей и газов является их способность:

— легко изменять форму, т. е. свойство *легкоподвижности*;

— легко изменять свой объем, т. е. свойство *сжимаемости* (для газов);

— изменять свое расположение в системе, т. е. диффундировать, что обеспечивает обмен массой, количеством движения и энергией на молекулярном уровне и реализует проявление таких специфических свойств, как молекулярные *диффузия*, *вязкость*, *теплопроводность*.

С другой стороны, в силу легкоподвижности к поверхности жидкости не может быть приложена сосредоточенная сила, а только непрерывно распределенная нагрузка.

2.2. Континуум. Гипотеза сплошности

Изучение поведения жидкости как анализ поведения каждой молекулы встречает огромные трудности. Поэтому для исследования жидкостей используется понятие континуума — сплошной среды, вводимого на основе гипотезы (постулата) Д'Аламбера—Эйлера [2]:

"При изучении направленного движения жидкостей и сил взаимодействия их с твердыми телами жидкости можно рассматривать как сплошную среду (континуум), лишенную молекул и межмолекулярных пространств".

Реально существующее хаотическое движение молекул отражается в этом случае в величине макроскопических параметров движения жидкости — ρ, p, T, w, которые для континуума являются функциями точек пространства, представляемого жидкими частицами.

Гипотеза сплошности хорошо "работает", если частицы жидкого объема удовлетворяют следующим требованиям:

1) характерный размер, например, диаметр d жидкой частицы, должен быть существенно меньше характерного размера системы, например, длины канала L:

$$\frac{d}{L} << 1; \qquad (2.1)$$

2) с другой стороны, жидкая частица должна содержать такое существенное число молекул, чтобы изменение этого числа за счет теплового хаотического движения не вызывало бы заметного изменения макропараметров. Это условие выполняется, если d существенно превышает длину свободного пробега молекул l, т. е.

$$\frac{d}{l} >> 1. \qquad (2.2)$$

Критерием выполнения гипотезы сплошности служит *число Кнудсена* — отношение длины свободного пробега молекул газа l к характерному размеру системы L

$$\mathrm{Kn} = \frac{l}{L}, \qquad (2.3)$$

а область существования континуума соответствует $\mathrm{Kn} < 0{,}01$.

Область числа $\mathrm{Kn} > 0{,}01$ соответствует течению разреженных газов, изучением которого занимается газодинамика разреженных газов [6].

Использование континуума, в частности его свойство непрерывности, позволяет применять для исследования жидкостей математический аппарат дифференциального и интегрального исчислений.

2.3. Силы и напряжения, действующие в жидкости

Из-за свойства легкотекучести к жидкости не может быть приложена сосредоточенная сила — это приведет к разрыву жидкости. Поэтому в гидрогазодинамике рассматриваются распределенные силы, а для характеристики силы в точке пользуются понятием *напряжения*. *Внешние силы*, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, разделяются на *массовые* (объемные) и *поверхностные*.

Массовые силы P_m приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и силы инерции. (Другие силы, возникающие при наличии, например, магнитного поля, здесь не рассматриваются.) ***Напряжением*** $\vec{J}_m$ [м/с^2, Н/кг] массовой силы называется предел отношения вектора P_m массовой силы к элементарной массе dm, на которую действует сила

$$\vec{J}_m = \lim \frac{\delta P_m}{\delta m}. \qquad (2.4)$$

При этом масса стремится к массе жидкой частицы. Напряжение массовой силы равно ускорению центра масс жидкой частицы и характеризует распределение массовых сил в пространстве, занятом жидкостью.

Поверхностные силы P_F представляют собой силовое воздействие окружающей среды на поверхность системы, причем это воздействие распределено по поверхности непрерывно. Рассмотрим плоскость F, рассекающую некоторый объем жидкости на две части: *1* и *2* (рис. 2.1). Пусть часть *1* представляет систему, часть *2* — окружающую среду. Выберем на поверхности сечения площадку ΔF с расположенной на ней точкой $A(x, y, z)$. Действие окружающей среды *2* на площадку ΔF системы *1* представляется равнодействующей поверхностных сил $\delta\vec{P}_F$. Ориентация площадки ΔF определяется единичным вектором внешней нормали $\vec{n}$, в общем случае не совпадающим с направлением вектора $\delta\vec{P}_F$. Поэтому рассматривают нормальную составляющую δP_{Fn} поверхностной силы $\delta\vec{P}_F$ и тангенциальную $\delta P_{F\tau}$.

Нормальная составляющая δP_{Fn} действует по нормали к поверхности ΔF противоположно $\vec{n}$. Тангенциальная составляющая $\delta P_{F\tau}$ действует по касательной к поверхности ΔF и представляет собой силу трения.

Напряжение поверхностной силы в точке $A(x, y, z)$ есть предел отношения соответствующей силы к площадке ΔF при стягивании ее в точку. Различают следующие напряжения. Напряжение равнодействующей поверхностной сил

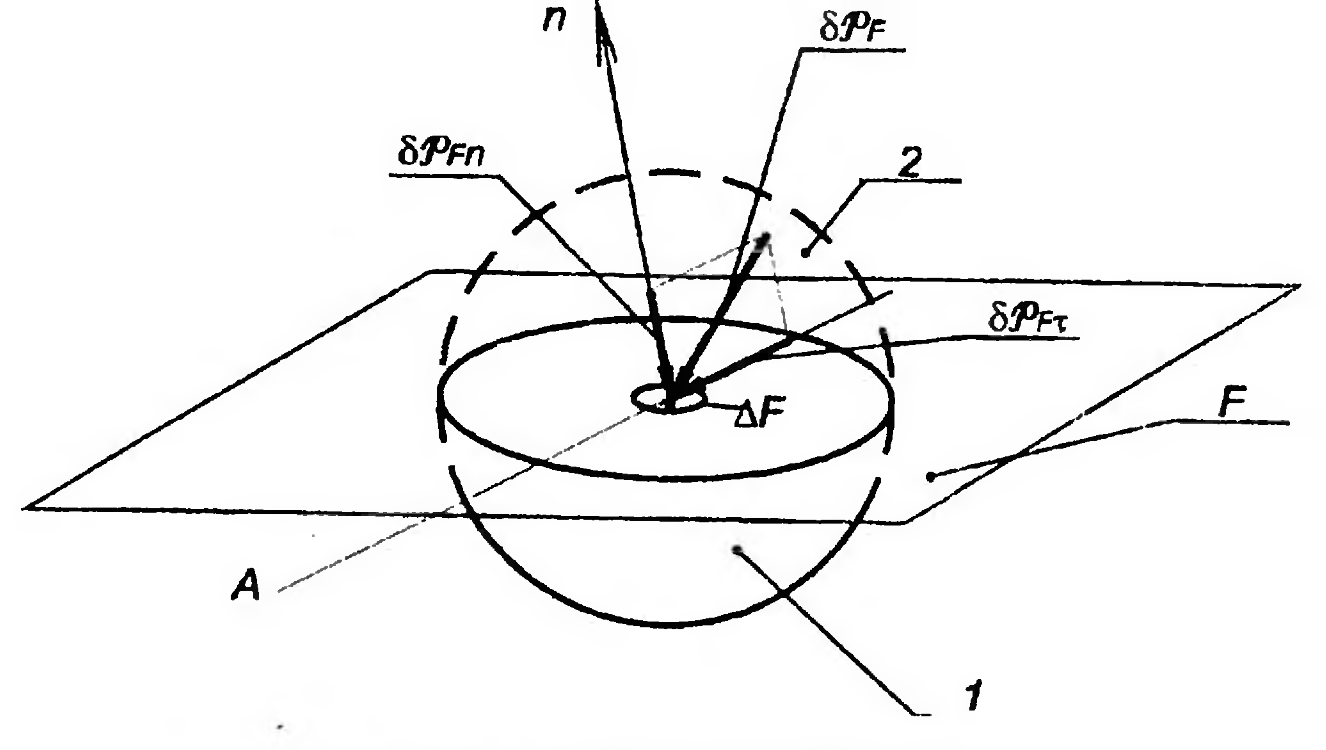


Рис. 2.1. Поверхностные силы

$$\vec{J} = \lim \frac{\delta P_F}{\Delta F}, \quad \text{Н/м}^2. \qquad (2.5)$$

Напряжение нормальной поверхностной силы, или ***нормальное напряжение***,

$$\sigma = -\lim \frac{\delta P_{F_n}}{\Delta F}, \quad \text{Н/м}^2. \qquad (2.6)$$

Знак "–" показывает, что за положительное принято растягивающее напряжение.

Напряжение трения, или ***касательное напряжение***,

$$\tau = \lim \frac{\delta P_{F_\tau}}{\Delta F}, \quad \text{Н/м}^2. \qquad (2.7)$$

2.4. Деформация и вращение жидкой частицы

Причиной деформации жидкой частицы являются напряжения. Нормальные и касательные напряжения вызывают деформации различного вида. Различают ***деформацию объема, или***

объемную деформацию, и деформацию формы, или сдвиговую деформацию.

При объемной деформации изменяется только объем, а форма частицы сохраняется. Например, если частица имела форму шара, то после объемной деформации, например, сжатия, она останется шаром, но меньшего диаметра.

При сдвиговой деформации изменяется только форма частицы, но объем ее сохраняется.

2.4.1. Объемная деформация. Рассмотрим объемную деформацию на примере жидкой частицы, имеющей форму параллелепипеда (рис. 2.2), ребра которого равны соответственно dx, dy, dz. На рис. 2.2,*а* показана гидрогазодинамическая система в форме параллелепипеда, на рис. 2.2,*б* показаны напряжения, действующие на выделенную систему.

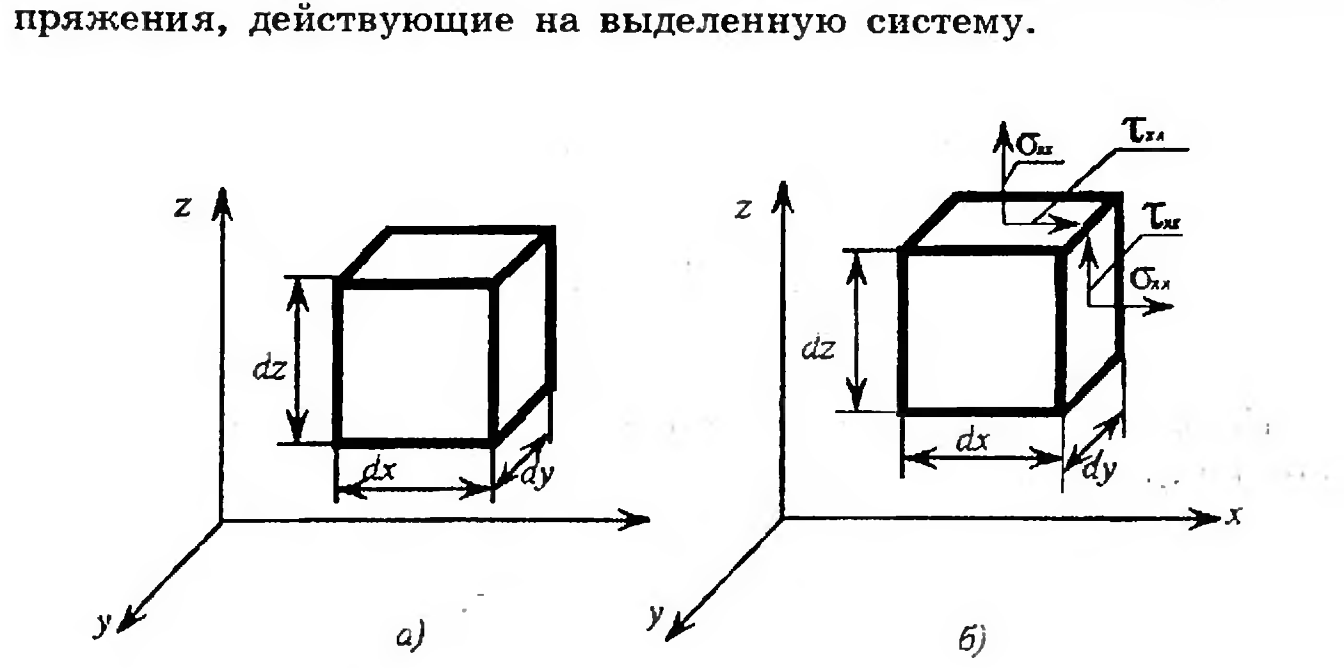


Рис. 2.2. Жидкая частица

Объем частицы $dV = dxdydz$. Обозначим деформацию объема жидкой частицы как δV. Мерой объемной деформации за единицу времени является скорость деформации. Поэтому нас будет интересовать скорость относительной объемной деформации

$$\varepsilon = \frac{\delta V}{dV\,dt}, \tag{2.8}$$

где $\frac{\delta V}{dV}$ — относительная объемная деформация; dt — интервал времени, за который объем изменился на δV. Решая задачу поэтапно, рассмотрим деформацию грани жидкой частицы (параллелепипеда) в плоскости XOY.

На рис. 2.3,*а* показаны две проекции параллелепипеда на плоскость XOY: $ABCD$ — до деформации и $AB'C'D'$ — после деформации. Деформация произошла в результате действия нормальных напряжений. На рис. 2.3,*б* показаны проекции скорости на оси координат $Y(V)$ и $X(U)$, действующие в различных точках системы.

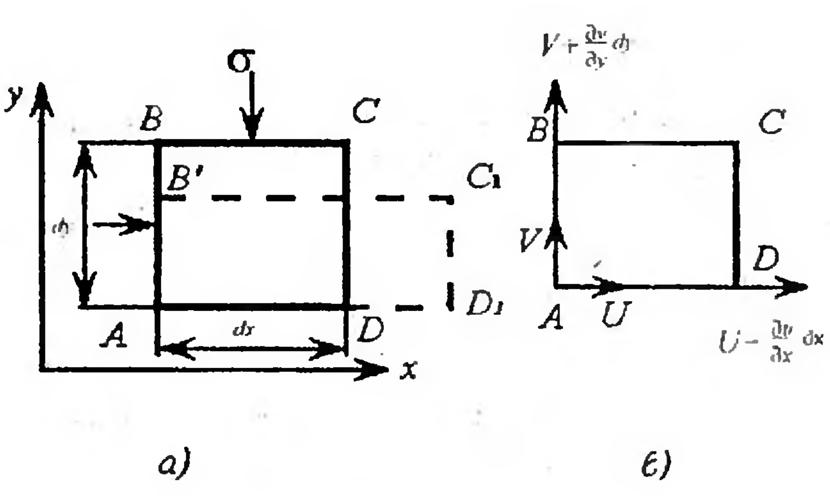


Рис. 2.3. К вычислению скоростей относительных сдвиговых и объемных деформаций жидкой частицы

Величина DD' представляет ***линейную деформацию*** вдоль оси OX. Величина $\frac{DD'}{AD} = \frac{DD'}{dX}$ — ***относительная линейная деформация***, а величина

$$\frac{DD'}{dX\,dt} = \varepsilon_x \text{ —} \tag{2.9}$$

скорость относительной линейной деформации вдоль оси OX.

Определим величину ε. Пусть проекция скорости жидкой частицы в точке A на ось OX равна u, а в точке D равна $u + \frac{\partial u}{\partial x}$. Тогда $DD' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} - u\right) dt$ и

$$\varepsilon_x = \frac{DD'}{dx\,dt} = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u\right)}{dx\,dt}\,dt = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.10}$$

Аналогично скорость относительной линейной деформации вдоль оси OY определяется как

$$\varepsilon_y = \frac{BB'}{dy\,dt} = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy - v\right)}{dy\,dt}\,dt = \frac{\partial v}{\partial y}; \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{2.12}$$

где v и w — соответственно проекции вектора скорости жидкой частицы $\vec{W}$ на оси OY и OZ.

Величина

$$DD'\,dydz = \delta V_x \tag{2.13}$$

дает изменение объема частицы за счет линейной деформации вдоль оси OX, а с учетом (2.10)

$$\delta V_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz\,dt = \frac{\partial u}{\partial x}\,dV\,dt. \tag{2.14}$$

Аналогично деформация δV_y объема вдоль оси OY

$$\delta V_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,dV\,dt, \tag{2.15}$$

и деформация δV_z объема вдоль оси OZ

$$\delta V_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,dV\,dt. \tag{2.16}$$

Тогда деформация объема δV жидкой частицы будет равна

$$\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dV\,dt. \tag{2.17}$$

Из (2.8) и (2.17) окончательно получаем выражение для скорости относительной объемной деформации жидкой частицы

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{W}. \qquad (2.18)$$

Условие неизменности объема жидкой частицы или отсутствия объемной деформации записывается как

$$\operatorname{div} \vec{W} = 0. \qquad (2.19)$$

2.4.2. Деформация сдвига. Деформация сдвига возникает при действии тангенциальных или касательных напряжений τ. Действуя поэтапно, рассмотрим деформацию сдвига жидкой частицы, показанной на рис. 2.4, в плоскости XOY.

На рис. 2.4,*а* показаны совмещенные в точке A две проекции жидкой частицы: до ($ABCD$) и после деформации ($AB''C''D''$). В результате действия касательных напряжений τ ребра сечения (например, AB и AD) поворачиваются за время dt в плоскости XOY, перпендикулярной оси OZ, на некоторые углы α и β соответственно. На рис. 2.4,*б* показаны проекции скорости на оси координат $V(Y)$ и $U(X)$, действующие в различных точках системы. В силу малости dt $\alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$ *и* $\beta \cong \operatorname{tg} \beta$.

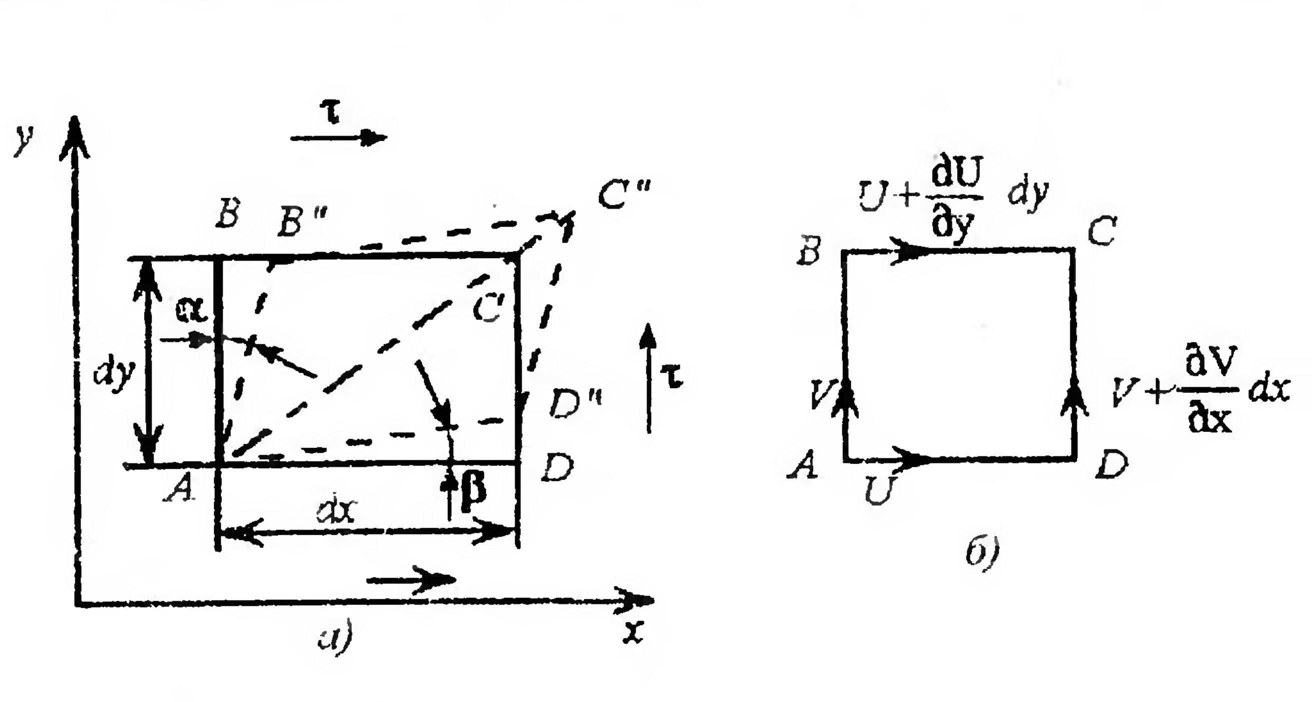


Рис. 2.4. К вычислению скоростей относительных сдвиговых деформаций жидкой частицы

Мерой деформации сдвига за единицу времени является скорость изменения прямого угла. Поэтому нас интересуют ***скорости относительных деформаций сдвига***, которые определяются как

$$\frac{BB''}{dy\,dt} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{dt} \cong \frac{\alpha}{dt}. \qquad (2.20)$$

Общая скорость q_z или q_{xy} относительной деформации сдвига или ***скорость изменения угла*** BAD

$$q_z = q_{xy} \cong \frac{\alpha + \beta}{dt}. \qquad (2.21)$$

Индекс z означает ось, относительно которой происходит поворот ребер, xy — плоскость в которой осуществляется вращение. Очевидно, величина BB'' будет определяться разностью проекций скорости на ось OX в точках A и B, умноженной на время (рис. 2.4), то есть

$$BB'' = \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,dt. \qquad (2.22)$$

Аналогично

$$DD'' = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dt. \qquad (2.23)$$

Тогда

$$q_z = q_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.24)$$

Используя для двух других плоскостей аналогичные рассуждения, получим

$$q_x = q_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (2.25)$$

$$q_y = q_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \qquad (2.26)$$

Следует заметить, что касательные напряжения вызывают не только сдвиговые деформации, но и вращение жидкой частицы. Выделим из выражений (2.25)—(2.27) *деформацию чистого сдвига и вращение.*

Деформация чистого сдвига соответствует условию неподвижности при деформации диагонали элемента частицы, например, диагональ AC на рис. 2.4,a. Это имеет место, когда ребра вращаются с одинаковой скоростью в противоположные стороны, а биссектриса угла BAD не вращается. Средняя скорость деформации определяется полуразностью частот вращения ребер, а так как они вращаются в разные стороны, то скорости суммируются. Таким образом, скорости относительной деформации чистого сдвига относительно каждой оси имеют вид

$$\gamma_x = \gamma_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (2.27)$$

$$\gamma_y = \gamma_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (2.28)$$

$$\gamma_z = \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2.29)$$

и представляют собой компоненты вектора деформации чистого сдвига

$$\vec{\gamma} = \vec{i}\gamma_x + \vec{j}\gamma_y + \vec{k}\gamma_z \, . \qquad (2.30)$$

2.4.3. Вращение. Чистое вращение жидкой частицы как твердого тела будет соответствовать вращению ребер (AB и AD на рис. 2.4,a) в одну сторону, так что угол между ребрами (BAD) не изменяется. При этом биссектриса угла AC будет поворачиваться. Из простых геометрических соображений следует, что скорость вращения биссектрисы равна полуразности скоростей вращения ребер.Тогда угловые скорости вращения жидкой частицы относительно осей координат

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (2.31)$$

представляют собой компоненты вектора угловой скорости вращения частицы относительно собственных осей:

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z\,, \quad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \qquad (2.32)$$

2.5. Движение жидкости

2.5.1. Методы Лагранжа и Эйлера изучения движения жидкости. Движение жидкости характеризуется прежде всего скоростью. Под ***скоростью*** жидкости в данной точке понимается скорость движения центра массы жидкой частицы, проходящей в данный момент через заданную точку пространства [2].

Движение ***твердого тела*** может быть определено,если в любой момент времени известны векторы скорости его точек, не лежащих на одной прямой.

Движение ***жидкости*** определяется при задании в любой момент времени вектора скорости всех ее частиц в рассматриваемой системе, т. е. пространственно-временного поля скоростей. Этим занимается раздел кинематики жидкости [7].

Для математического описания движения жидкости используется метод Лагранжа или метод Эйлера. В ***методе Лагранжа*** изучается движение каждой отдельной частицы, которая помечается ее координатами (x_0, y_o, z_0) в начальный момент времени t_0, а движение жидкости задается параметрическими уравнениями траекторий всех частиц жидкости

$$x = x\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t),\ \ y = y\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t),$$

$$z = z\,(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t). \qquad (2.33)$$

При этом скорости частиц (их проекции на координатные оси) определяются как $u = \dfrac{dx}{dt}$, $v = \dfrac{dy}{dt}$, $w = \dfrac{dz}{dt}$, а x_0, y_0, z_0— как переменные Лагранжа.

В ***методе Эйлера*** изучается движение, происходящее во времени в точках x, y, z системы. Поэтому задается все поле скоростей в движущейся жидкости как функция координат и времени:

$$u = u\,(x,\,y,\,z,\,t),\ \ v = v\,(x,\,y,\,z,\,t),\ \ w = w\,(x,\,y,\,z,\,t). \qquad (2.34)$$

Для нахождения скорости необходимо только задать координаты точки, т. е. положить $x = a$, $y = b$, $z = c$. При этом x, y, z, t — переменные Эйлера.

Для нахождения траекторий частиц необходимо проинтегрировать систему уравнений (2.34) и исключить из нее время t.

Составляющие ***поля ускорений*** находятся прямым дифференцированием (2.34) по времени. В результате получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (2.35)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Величины $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ являются компонентами ***местной, или локальной***, составляющей ускорения, а величины, характеризующие изменение скорости в пространстве в данный момент времени (остальные члены), называются ***конвективными*** составляющими. В целом ряде случаев для анализа движения жидкостей успешно используются модели частных случаев течения, таких как установившееся, одномерное, двумерное, потенциальное.

2.5.2. Установившееся течение. ***Установившееся, или стационарное, течение*** — это течение, в котором параметры жидкости в каждой точке поля не изменяются во времени. В этом случае время исключается из числа независимых переменных, т. е.

$$u = u(x, y, z), \; v = v(x, y, z), \; w = w(x, y, z). \qquad (2.36)$$

а локальные составляющие ускорения равны нулю, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \qquad (2.37)$$

Стационарное плоское (двумерное) течение — это течение, в котором частицы движутся параллельно некоторой фик-

сированной плоскости, например XOY, причем во всех плоскостях, параллельных этой плоскости, течение одинаково. Параметры жидкости не изменяются вдоль оси OZ:

$$u = u\,(x,\,y) \qquad \frac{du}{dt} = u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y}\,;$$

$$v = v\,(x,\,y) \qquad \frac{dv}{dt} = u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{2.38}$$

Одномерное стационарное течение — это течение, которое зависит только от одной пространственной координаты x:

$$u = u(x) \qquad \frac{du}{dt} = u\,\frac{du}{dx}\,. \tag{2.39}$$

Потенциальное течение соответствует отсутствию вращения жидких частиц вокруг собственных осей. Такое движение называется еще ***безвихревым***, и математически ему соответствует условие $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ или с учетом (2.29)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\,. \tag{2.40}$$

Если движение жидкости задано в переменных Лагранжа, геометрическое представление потока дается траекториями. ***Траектория*** — геометрическое место положений одной и той же частицы. В переменных Эйлера для геометрической интерпретации потока используются линии тока. ***Линия тока*** — это линия, в каждой точке которой в данное мгновение вектор скорости совпадает с касательной к этой линии. Совпадение линий тока и траекторий имеет место только в случае установившегося течения.

2.5.3. Элементарная струйка. Выберем в жидкости замкнутый контур F (рис. 2.5). Через все точки контура проведем линии тока. Поверхность, образованная линиями тока, проходящими через все точки замкнутого контура, называется ***трубкой тока***, а жидкость, движущаяся внутри трубки тока, — ***струйкой***. Уменьшая поперечное сечение струйки, можно добиться того, что параметры будут изменяться только вдоль оси

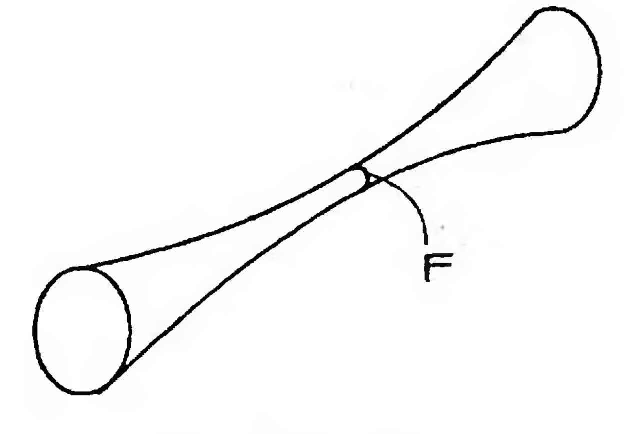


Рис. 2.5. Трубка тока

струйки и не будут изменяться поперек струйки. Такая струйка называется *элементарной* [9].

2.5.4. Теорема Коши-Гельмгольца. *Виды движения жидкой частицы* определяются теоремой Коши-Гельмгольца [2]. Скорость w движения любой точки жидкой частицы в данное мгновение можно рассматривать как результат сложения векторов простых движений: *поступательного* движения частицы как твердого тела вдоль некоторой траектории; *вращательного* движения относительно собственных осей, проходящих через частицу; *деформационного* движения, изменяющего форму и размеры частицы (деформация сдвига и объемная деформация).

Если два первых вида движения определяют движение твердого тела, то третий вид (деформационное движение) характерен только для жидкости. Деформационное движение определяется девятью компонентами: тремя скоростями линейной деформации (2.10)—(2.12) и шестью скоростями сдвиговой деформации (2.28). Они образуют тензор скоростей деформации, который обычно записывают в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (2.41)$$

или в более короткой записи

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial w_i}{x_j} + \frac{\partial w_j}{x_i} \right),$$

где $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$.

2.6. Вязкость

2.6.1. Закон Ньютона о трении в жидкости. *Вязкостью* называется свойство всех реальных жидкостей оказывать сопротивление сдвигу, т. е. движению одного слоя жидкости относительно другого. Сила сопротивления относительному сдвигу может быть определена по закону Ньютона о трении в жидкостях. Этот закон был установлен Ньютоном экспериментально (1687), а затем получен на основании кинетической теории газов [6]. Формула *закона Ньютона* имеет вид

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{2.42}$$

где $\tau = \frac{P}{F}$, Н/м^2 — напряжение трения, или касательное напряжение; P, Н — сила трения; F, м^2 — площадь, на которую действует сила P; μ, Н·с/$м^2$ — *коэффициент динамической вязкости, или вязкость жидкости* — сила, действующая на 1 м^2 поверхности слоев жидкости при градиенте скорости $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial u}{\partial y}$, 1/$c$ — поперечный градиент скорости; характеризует скорость деформации сдвига (см. (2.24)).

Величина μ является физической характеристикой каждой жидкости. Чем больше μ, тем больше вязкость. Коэффициент μ зависит от природы жидкости, ее температуры и практически не зависит от давления.

На практике используется также коэффициент кинематической вязкости ν:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ м}^2/\text{с}. \tag{2.43}$$

На рис. 2.6 показаны графики зависимости коэффициентов динамической вязкости различных жидкостей и газов от температуры. Вязкость жидкостей уменьшается, а вязкость газов увеличивается с увеличением температуры. Разница в поведении жидкостей и газов объясняется различием в механизмах молекулярного трения [2].

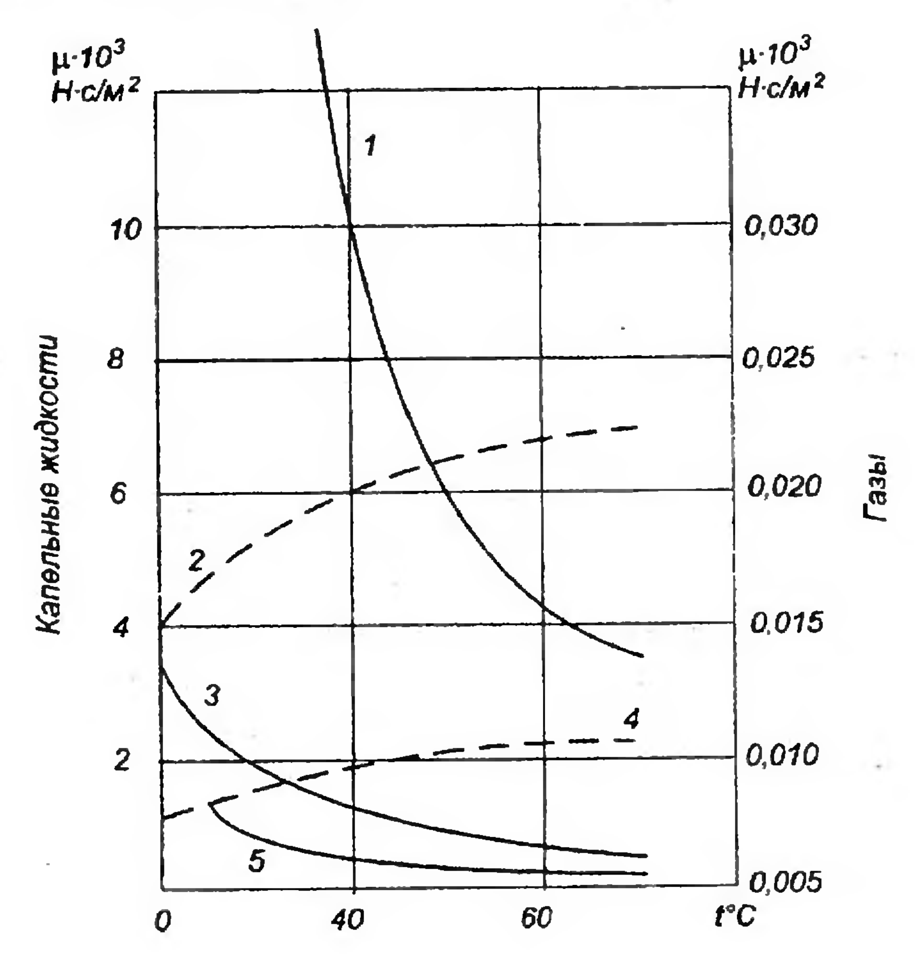


Рис. 2.6. Зависимость вязкости от температуры:
1 — масло; *2* — воздух; *3* — керосин; *4* — водород; *5* — вода

Трение в капельных жидкостях реализуется в преодолении сил взаимодействия между молекулами смещающихся слоев. С увеличением температуры у капельных жидкостей увеличивается частота колебаний молекул, и силы взаимодействия между ними уменьшаются, при этом уменьшается и вязкость.

Трение в газах обусловлено переносом направленного количества движения молекул при тепловом хаотическом движении. С ростом температуры скорость молекул увеличивается, растет перенос количества движения и вязкость газа. В частности, на основе кинетической теории газов [6] получено следующее выражение для коэффициента вязкости газов:

$$\mu = 0{,}499\, l_м \cdot w_м \cdot \rho, \tag{2.44}$$

где $l_м$ — длина свободного пробега молекул; $w_м$ — скорость теплового движения молекул.

Для практических расчетов зависимости вязкости от температуры пользуются следующей эмпирической формулой:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \tag{2.45}$$

где $T_0 = 273$ К; μ_0 — значение коэффициента при T_0 и $p_0 = 10^5$ Па.

Показатель n слабо зависит от температуры и для воздуха составляет $n = 0{,}76$.

2.6.2. Гипотеза прилипания Прандтля. При $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, т. е. при равномерном поле скоростей, трение в жидкости не проявляется и напряжение трения равно нулю. Немецкий ученый Л. Прандтль [10] установил, что при взаимодействии жидкости с поверхностью обтекаемого тела всегда нарушается равномерность поля скоростей и возникает градиент скорости, отличный от нуля $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \right)$. Этот факт был сформулирован в виде *четвертой гипотезы*:

При обтекании жидкостью тел молекулы жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности, всегда движутся со скоростью этой поверхности, т. е. как бы прилипают к ней.

Эта гипотеза хорошо подтверждается на практике, а факт прилипания объясняется действием сил притяжения между молекулами жидкости и твердого тела.

Гипотеза прилипания объясняет возникновение на поверхности обтекаемых жидкостью тел очень тонкой области с градиентом скорости, отличным от нуля. Эта область называется *пограничным слоем*. В пограничном слое проявляется действие вязких напряжений, совершается работа трения и происходит диссипация энергии.

2.6.3. Невязкая, или идеальная жидкость. В ряде случаев касательные напряжения существенно меньше нормальных или

не проявляются совсем (отсутствуют деформации сдвига). Жидкость или газ, не обладающие вязкостью, будем называть соответственно *невязкой жидкостью* или *невязким газом*, условно полагая

$$\mu = 0. \tag{2.46}$$

В гидрогазодинамике невязкая жидкость или газ носят название *идеальной жидкости* или *газа*.

2.7. Напряженное состояние жидкой частицы. Гидростатическое давление

2.7.1. Напряжения и давление. Пусть жидкая частица имеет форму параллелепипеда (см. рис. 2.2,*а*). На грани параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения.

Для их обозначения используются, как правило, два индекса. Первый индекс обозначает ось, перпендикулярную грани, в которой действует напряжение; второй индекс — ось, на которую проецируется напряжение. На рис. 2.2,*б* показаны нормальные напряжения σ_{zz} и σ_{xx} и касательные τ_{zx} и τ_{xz}. Для нормальных напряжений иногда используется один индекс, т. е. $\sigma_{xx} = \sigma_x$. Всего на гранях жидкой частицы действует девять напряжений, которые можно записать в виде матрицы:

$$\sigma_{i,\,j} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

$$i = x,\, y,\, z;\; j = x,\, y,\, z.$$

Девять скалярных величин, определяющих напряженное состояние жидкой частицы,составляют тензор напряжений. Из условия равновесия параллелепипеда (равенство моментов сил относительно произвольной оси) следует равенство касательных напряжений с одинаковыми индексами, т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx},\ \ \tau_{xz} = \tau_{zx},\ \ \tau_{yz} = \tau_{zy}\,. \tag{2.48}$$

При отсутствии трения в невязкой жидкости касательные напряжения обращаются в нуль:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (2.49)$$

В этом случае напряжения не зависят от ориентации площадки, а напряжение, взятое с обратным знаком, называют *гидростатическим* или *статическим* давлением:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p. \quad (2.50)$$

Для задач, рассматриваемых в курсе, предполагается, что нормальное напряжение слабо зависит от скорости объемной деформации $\varepsilon = \operatorname{div} \overline{w}$, что соответствует гипотезе Стокса (1845) о равенстве нулю так называемой объемной вязкости μ' [7]. Поэтому общее выражение для тензора напряжений можно записать как [11]

$$\sigma_{i,\,j} = -p\delta_{i,\,j} + \sigma'_{i,\,j}, \quad i = x,\, y,\, z; \quad j = x,\, y,\, z, \quad (2.51)$$

где $\delta_{i,\,j}$ — символ Кронекера: при $i = j$ $\delta_{i,\,j} = 1$; при $i \neq j$ $\delta_{i,\,j} = 0$, $\sigma'_{i,\,j}$ — напряжения, зависящие от вязкости.

2.7.2. Связь между напряжениями и деформациями. Связь между напряжениями и деформационным состоянием движущейся жидкости устанавливается феноменологически, а именно постулируется обобщенным законом Ньютона. В основе этого закона лежат следующие основные допущения [13].

1. Компоненты тензора напряжений в данной точке поля течения полностью определяются компонентами тензора скоростей деформаций и обратно.

2. Компоненты тензора напряжений в каждой точке являются линейными функциями тензора скоростей деформации, причем коэффициенты этих функций не зависят от выбора системы координат, т. е. жидкость изотропна (свойства по всем направлениям одинаковы).

С учетом гипотезы Стокса о равенстве нулю объемной вязкости μ' выражения обобщенного закона Ньютона имеют вид:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{W}\right),$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{W}\right),$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{W}\right), \tag{2.52}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

или в общем виде

$$\sigma_{i,j} = \left(-p + 2\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{W}\right)\right)\delta_{i,j} +$$

$$+\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)(1 - \delta_{i,j}), \tag{2.53}$$

где $i = x, y, z$; $j = x, y, z$,

2.8. Сжимаемость. Несжимаемая жидкость

Сжимаемость — способность среды изменять свой объем (и плотность) при изменениях давления и температуры. Для характеристики сжимаемости используется *модуль упругости*, или *коэффициент сжимаемости среды*.

Модуль упругости К представляет собой отношение изменения давления δp к относительному изменению объема $\frac{\delta v}{v}$, вызванному этим изменением давления в данном процессе

$$K = -v\frac{\partial p}{\partial v} = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad \text{Н/м}^2. \tag{2.54}$$

Величина, обратная модулю упругости, называется *коэффициентом сжимаемости*:

$$\beta = \frac{1}{K}, \quad \text{м}^2/\text{Н}. \tag{2.55}$$

Коэффициент сжимаемости большинства жидкостей лежит в пределах $10^{-9} \div 10^{-10}$ Н/м^2. Расстояние между соседними частицами в жидкостях составляет 10^{-8} и сравнимо с размерами атомов и молекул. Поэтому жидкости обладают малой сжимаемостью. Модуль упругости для воды при нормальных условиях $K = 2{,}25 \cdot 10^9$ Н/м^2. При изменении температуры плотность жидкости изменяется более существенно. Это свойство используется в термометрах.

Сжимаемость газов очень велика. Для изотермического процесса сжатия газа при $T = \text{const}$ выражение для модуля упругости будет иметь вид

$$K = p. \tag{2.56}$$

Таким образом, сжимаемость газов тем больше, чем меньше давление.

Несжимаемой жидкостью называют жидкость, объем которой и плотность остаются постоянными в процессе изменения состояния. Для несжимаемой жидкости скорость относительной объемной деформации

$$\varepsilon = \operatorname{div} \vec{W} = 0 \tag{2.57}$$

или

$$\rho = \text{const}\,. \tag{2.58}$$

2.9. Определяющие уравнения. Уравнение состояния. Совершенный газ

2.9.1. Определяющее уравнение как уравнение состояния. В фундаментальных законах сохранения, используемых для построения математических моделей, не содержится никаких параметров, характеризующих конкретное рабочее тело. Поэтому к ним следует добавить определенное число уравнений состояния, где учтены специфические свойства рассматриваемого рабочего тела. В термодинамике сплошных сред эти уравнения называют *определяющими* [14].

Определяющие уравнения выделяют из всего класса рабочих тел, подчиняющихся фундаментальным законам, конкретный

узкий класс рабочих тел. В качестве одного из определяющих уравнений используются уравнения состояния. Они обычно выражают экспериментально устанавливаемые зависимости между плотностью ρ, давлением p и температурой T [15]. Однако некоторые получаются на основе теоретических предпосылок, например, кинетической теории газов.

Общая форма уравнения состояния газов, справедливая в широком диапазоне температур и давлений, может быть представлена в виде уравнения Битти-Бриджмена [11]:

$$\frac{p}{\rho RT} = 1 + B_1(T)\rho + B_2(T)\rho^2 + B_3(T)\rho^3, \qquad (2.59)$$

где R — удельная газовая постоянная, Дж/кг · К, определяемая как

$$R = \frac{R_m}{m}, \qquad (2.60)$$

где R_m = 8320 Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная; m — масса моля газа, кг/моль; B_1, B_2, B_3 — функции только температуры.

Если положить $B_2 = B_3 = 0$, а

$$B_1 = b_1 - \frac{b_2}{RT}, \qquad (2.61)$$

то из (2.59) получим уравнение состояния, известное как уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$p + b_2\rho^2 = \rho RT(1 + b_1\rho). \qquad (2.62)$$

Здесь b_1 и b_2 — константы для каждого газа. Это уравнение достаточно удовлетворительно описывает свойства жидкости как в газообразной, так и в жидкой фазах.

2.9.2. Совершенный газ. Если в (2.59) положить $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, то получается уравнение совершенного газа, справедливое для газов в диапазоне умеренных температур и давлений

$$p = \rho RT. \qquad (2.63)$$

Уравнение совершенного газа широко используется в газовой динамике. Совершенный газ можно определить как газ, подчиняющийся следующим законам.

1. Внутренняя энергия на единицу массы зависит только от абсолютной температуры, т. е.

$$u = u(T), \text{ Дж/кг}. \qquad (2.64)$$

2. Статическое давление p не зависит от скорости деформации, а определяется для данного газа только плотностью ρ и температурой T: $p = p(\rho, T)$, Н/м^2.

3. Энтальпия определяется как

$$i = u + p/\rho, \quad \text{Дж/кг} \qquad (2.65)$$

и является функцией только абсолютной температуры.

4. Удельная теплоемкость при постоянном объеме определяется как

$$C_v = \frac{\partial u}{\partial T}, \quad \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)} \qquad (2.66)$$

и является константой.

5. Удельная теплоемкость при постоянном давлении определяется как

$$C_p = \frac{\partial i}{\partial T}, \quad \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)} \qquad (2.67)$$

и является константой.

6. C_p и C_v связаны уравнением Майера

$$C_p = C_v + R. \qquad (2.68)$$

7. Отношение теплоемкостей называется *показателем изоэнтропы*

$$k = C_p / C_v. \qquad (2.69)$$

Внутренняя энергия газа складывается из энергии поступательного, вращательного и колебательного движений молекул

газа, а также энергии диссоциации и электронного возбуждения молекул. При температуре ниже 10000 К можно пренебречь энергией электронного возбуждения, а при температуре ниже 2000 К — энергией диссоциации молекул. В реальных условиях течения все изменения состояния среды происходят не мгновенно, и для достижения равновесного состояния требуется определенное время, называемое ***временем релаксации***. Для поступательного и вращательного движений эти времена достаточно малы, а времена релаксации колебательных движений достаточно велики. В этих условиях энергией колебательного движения можно пренебречь. При этом все законы 1—7 совершенного газа справедливы и поведение газа хорошо описывается этой моделью.

2.10. Перенос массы, количества движения и энергии

Поведение жидкости в значительной степени определяется переносом массы, количества движения и энергии. Для гидрогазодинамики наибольшее значение имеют два вида переноса: ***конвективный и диффузионный*** (***градиентный***) [12].

Конвективный перенос (конвекция) — это перенос массы, количества движения и энергии с вектором скорости движущейся жидкости.

Диффузионный, или градиентный, перенос — это перенос массы путем диффузии, осуществляемой пропорционально градиенту соответствующего параметра.

Для характеристики переноса массы, количества движения и энергии используются удельные потоки q, т. е. векторные величины, определяющие количество массы, количества движения и энергии, переносимые сквозь единичную площадку в единицу времени в направлении нормали к площадке.

Пусть q_m характеризует перенос массы, q_{mw} — перенос количества движения; q_T — перенос энергии в форме тепла. Тогда выражения для конвективного переноса могут быть записаны как

$$\vec{q}^{\,k}_{m} = \vec{W}\rho, \text{ кг/м}^2\cdot\text{с}; \qquad (2.70)$$

$$\vec{q}^{\,k}_{mw} = \vec{W} w\rho, \quad \text{Н/м}^2; \qquad (2.71)$$

$$\vec{q}^{\,k}_T = \vec{W} \rho\, C_v T, \quad \text{Дж/(м}^2 \cdot \text{с)}. \tag{2.72}$$

Здесь $\vec{W}$ — вектор скорости потока; ρ — плотность потока; C_v — темплоемкость при постоянном объеме; T — температура потока.

Наряду с тепловой энергией единичной массы $C_v T$ конвекцией переносится также кинетическая энергия движущейся среды $w^2/2$, потенциальная энергия давления p/ρ и другие виды энергии. Тогда вектор конвективного переноса энергии

$$\vec{q}^{\,k}_E = \vec{W} \rho \left(C_v T + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right), \quad \text{Дж/(м}^2 \cdot \text{с)}. \tag{2.73}$$

Выражения для диффузионного, или градиентного, переноса массы дает известный закон Фика [12]:

$$\vec{q}^{\,\text{диф}}_{mi} = -D_i \left(\vec{i} \frac{\partial c_i}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial c_i}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial c_i}{\partial z} \right), \tag{2.74}$$

где q_{mi} — диффузионный поток массы i-го компонента; c_i, кг/м^3 — парциальная плотность или концентрация i-го компонента среды;

$$D_i = 1/2\, w_{\text{м}} l_{\text{м}}\,, \tag{2.75}$$

D_i, м^2/с — коэффициент диффузии i-го компонента; $w_{\text{м}}$ — средняя скорость движения молекул i-го вещества; $l_{\text{м}}$ — длина свободного пробега молекул i-го вещества.

Диффузионный перенос количества движения определяется обобщенным законом Ньютона и определяет вязкие напряжения на границе слоя, через который осуществляется перенос [12]:

$$\vec{\sigma}\,' = \nu \frac{\partial (\vec{w} \rho)}{\partial n}, \quad \text{Н/м}^2, \tag{2.76}$$

где $\vec{W}\rho$, кг/м^2 — вектор плотности тока; n — направление нормали к слою, в котором определяется напряжение; ν — ко-

эффициент кинематической вязкости, или кинематическая вязкость газа (см. 2.43),

$$\nu = \frac{1}{2} w_м l_м, \quad м^2/с. \tag{2.77}$$

Выражение для вектора диффузионного переноса энергии имеет вид [12]

$$\vec{q}^{\,d}_E = -a \left(\vec{i} \frac{\partial e}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial e}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial e}{\partial z} \right), \quad Дж/м^2, \tag{2.78}$$

где e — объемная плотность энергии;

$$a = \frac{1}{2} w_м l_м, \quad м^2/с \tag{2.79}$$

— коэффициент диффузионного переноса энергии.

В частном случае, когда рассматривается перенос энергии в форме тепла

$$de = \rho C_v \, dT, \tag{2.80}$$

и вектор диффузионного потока тепла выражается известным законом Фурье:

$$\vec{q}^{\,d}_T = -a\rho C_v \left(\vec{i} \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad Дж/(м^2 \cdot с). \tag{2.81}$$

Величину

$$a\rho C_v = \lambda, \quad Дж/(м \cdot К \cdot с) \tag{2.82}$$

называют *коэффициентом теплопроводности*, а коэффициент диффузионного переноса энергии a — *коэффициентом температуропроводности*.

В зависимости от условий и режима течения диффузионные и конвективные потоки могут различаться на несколько порядков. Это позволяет в каждой конкретной задаче ограничиться каким-либо одним видом переноса и таким образом упростить математическую модель.

2.11. Об эффективности использования рабочего тела. Работоспособность, или эксергия. Диссипация энергии

Одной из задач изучения курса является освоение анализа эффективности газодинамических процессов. Рабочее тело газодинамической системы обладает определенной энергией E или e — энергией на единицу массы. Для газодинамических процессов наибольшее значение имеют:

внутренняя энергия

$$e_T = C_v T; \tag{2.83}$$

потенциальная энергия давления

$$e_p = p/\rho; \tag{2.84}$$

кинетическая энергия

$$e_w = w^2/2. \tag{2.85}$$

Таким образом, энергия системы в некотором состоянии 1 может характеризоваться как

$$e_1 = C_v T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2}. \tag{2.86}$$

Какую максимальную работу может совершить система при взаимодействии с окружающей средой? На этот вопрос и отвечает работоспособность, или эксергия.

Работоспособность, или эксергия — это максимальная работа, которую может совершить в обратимом процессе взаимодействия с окружающей средой система, если в конце этого процесса рабочее тело системы приходит в состояние равновесия со всеми параметрами окружающей среды. В случае рассматриваемой газодинамической системы это равновесие по температуре, давлению и скорости. Если параметры окружающей среды обозначить индексом 0 (температура T_0, давление p_0, скорость w_0), то энергия рабочего тела на уровне окружающей среды запишется как

$$e_0 = C_v T_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{w_0^2}{2}. \tag{2.87}$$

Выражение для удельной на единицу массы максимальной работы системы $l_1^{\max}$ в состоянии 1, равное работоспособности

(эксергии) системы, будет иметь следующий вид (разница в химическом составе рабочего тела и окружающей среды не учитывается):

$$l_1^{\max} = C_v (T_1 - T_0) + \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) + \left(\frac{w_1^2}{2} - \frac{w_0^2}{2} \right) - T_0 (s_1 - s_0) \qquad (2.88)$$

или

$$l_1^{\max} = (e_1 - e_0) - T_0 (s_1 - s_0), \qquad (2.89)$$

где s_1 — энтропия системы в состоянии 1; s_0 — энтропия окружающей среды.

В отличие от энергии эксергия не подчиняется закону сохранения и уменьшается в необратимых процессах. Изменение работоспособности, или эксергии, в процессе между двумя состояниями можно записать как

$$\Delta l_{1-2}^{\max} = (e_1 - e_2) - T_0 (s_1 - s_2). \qquad (2.90)$$

Для энергетически изолированной системы $e_2 = e_1$. В соответствии со вторым законом термодинамики энтропия в изолированной системе не изменяется в случае обратимого процесса и возрастает в необратимом процессе. Тогда потери эксергии (работоспособности) от необратимости можно записать как

$$\nabla l_{2-1}^{\max} = T_0 (s_2 - s_1). \qquad (2.91)$$

Формула (2.91) выражает закон Гюи-Стодолы [5] для потери эксергии, или работоспособности. Эти потери характеризуют *диссипацию энергии*, т. е. показывают, какая доля энергии, которая в целом сохраняется, теряет способность к совершению работы. Следует отметить, что эта потеря работоспособности системы соответствует только данным конкретным граничным условиям для системы, задаваемым параметрами окружающей среды.

2.12. Распространение слабых возмущений. Скорость звука. Число Маха. Граничные условия по давлению

Изменение давления в сплошной среде (возмущение) распространяется в виде волны с некоторой скоростью. Рассмотрим

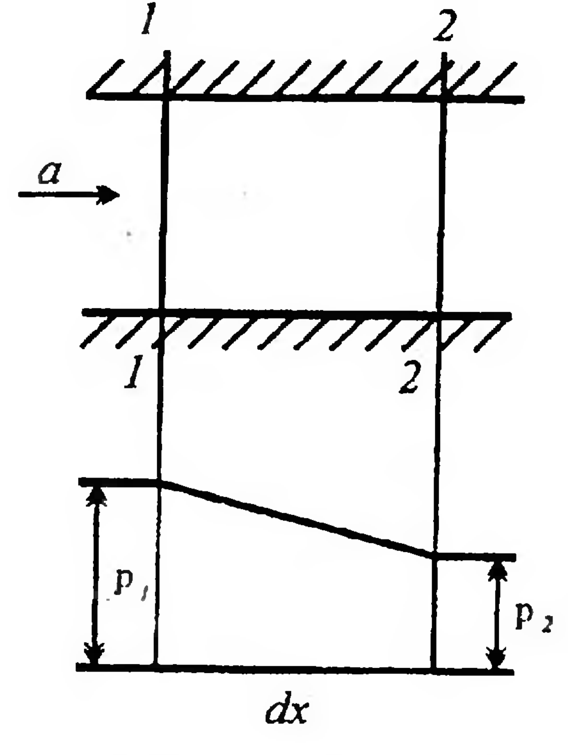


Рис. 2.7. Распространение слабых возмущений в канале возмущений

слабые возмущения, соответствующие условию $\frac{\delta p}{p} << 1$, где δp — возмущение давления. Подобные возмущения соответствуют акустическому приближению, поэтому скорость распространения таких волн называется ***скоростью звука***.

Рассмотрим движение плоской звуковой волны в трубе постоянного сечения (рис. 2.7).

Пусть в момент $t = t_1$ звуковая волна занимает сечение *1-1*. За время dt фронт волны переместится в положение *2-2* на расстояние dx. Очевидно, скорость распространения будет

$$a = \frac{dx}{dt}. \qquad (2.92)$$

Рассмотрим объем *1-1—2-2*, ограниченный стенками канала и положением фронта волны в два момента времени t и $t + dt$. Под действием перепада давления $dp = p_1 - p_2$ внутрь этого объема втекает жидкость со скоростью dw. В сечении *2-2* движение пока отсутствует, так как возмущение не распространилось на это сечение. Тогда изменение количества движения в рассматриваемом объеме равно mdw, где $m = \rho F dx$ — масса; ρ — плотность; F — площадь сечения. В соответствии со вторым законом Ньютона изменение количества движения равно импульсу силы, которая создается благодаря разности давления dp, т. е.

$$\rho F dw\, dx = dp\, F\, dt. \qquad (2.93)$$

Отсюда с учетом (2.92)

$$dp = \rho a dw. \qquad (2.94)$$

Втекание жидкости в объем увеличивает ее плотность на величину

$$d\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{\rho F\, dw\, dt}{F\, dx}. \tag{2.95}$$

Подставляя из (2.95) выражение для dw в (2.94), получаем

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \tag{2.96}$$

В соответствии с гипотезой Лапласа процесс распространения слабого возмущения можно считать изоэнтропийным, т. е. удовлетворяющим уравнению изоэнтропы

$$p/\rho^k = \text{const}. \tag{2.97}$$

Используя (2.97), получаем, что

$$dp = k\rho^{k-1}\,\text{const}\, d\rho = kp/\rho \cdot d\rho. \tag{2.98}$$

Для газа, подчиняющегося уравнению (2.63) состояния совершенного газа ($p = \rho RT$), окончательно имеем

$$a = \sqrt{kRT}. \tag{2.99}$$

Таким образом, скорость распространения слабых возмущений в газе зависит от теплофизических свойств рабочего тела k и R и абсолютной температуры T.

Отношение скорости потока к скорости звука определяет исключительно важную для газовой динамики величину — ***число Маха*** M:

$$\text{M} = \frac{w}{a}. \tag{2.100}$$

Число Маха является ***критерием скоростного режима***, который:

- разделяет всю область течения на две качественно различающиеся поведением области: дозвуковую — M < 1 и сверхзвуковую — M > 1;
- позволяет определить область течения газа, в которой сжимаемостью газа можно пренебрегать, полагая газ не-

сжимаемой жидкостью. Эта область лежит в диапазоне $0 < M < 0{,}3$. Такое допущение существенно упрощает расчеты течения газа;

- позволяет устанавливать граничные условия по давлению для системы. Если течение на границе системы дозвуковое, т. е. $M < 1$, то все возмущения давления из окружающей среды (разница между давлением на границе системы $p_с$ и давлением окружающей среды $p_н$) будут проникать в систему и так перестраивать режим течения, чтобы ликвидировать это возмущение, т. е. реализовать течение при условии

$$p_с = p_н\,. \tag{2.101}$$

Если течение на границе системы звуковое или сверхзвуковое, т. е. $M_с \geq 1$, то возмущения из внешней среды не смогут проникнуть в систему, так как они распространяются со скоростью звука, и возможно существование данного режима на границах системы при условии

$$p_с \neq p_н. \tag{2.102}$$

2.13. Гидродинамические режимы течения: ламинарный и турбулентный. Число Рейнольдса

Соотношение между инерционными и вязкими силами в потоке жидкости (газа) определяет гидродинамические режимы течения. Английским физиком О. Рейнольдсом в 1883 году впервые было установлено существование двух качественно различных гидродинамических режимов течения — *ламинарного и турбулентного*. Опыт Рейнольдса заключался в следующем. Исследуя течение жидкости в прозрачном канале, он изменял такие параметры жидкости, как скорость w, плотность ρ, диаметр канала d, коэффициент вязкости μ за счет использования различных жидкостей. Течение визуализировалось подачей вдоль оси канала тонкой подкрашенной струйки жидкости. При этом наблюдались два качественно различных режима: первый соответствовал практическому отсутствию перемешивания подкрашенной струйки с потоком в канале. Этот режим

получил название ***слоистого, или ламинарного***. Второй режим отличался размыванием подкрашенной струйки и интенсивным беспорядочным перемешиванием и был назван ***турбулентным***. Обработка опытов показала, что переход от ламинарного режима к турбулентному и обратно не определялся значением какого-либо одного параметра, а изменению гидродинамического режима соответствовало некоторое значение безразмерного числа, названного ***числом Рейнольдса***:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho w d}{\mu}. \quad (2.103)$$

Численное значение числа Рейнольдса, соответствующее переходу от одного режима к другому, получило название ***критического***. Для круглых труб $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$.

Число Рейнольдса представляет собой отношение сил инерции к силам вязкости. Ламинарный режим течения обусловливается преобладанием вязких сил, которые гасят все случайные возмущения, возникающие в жидкости, например, от тряски трубопровода, шероховатости трубы и т. д. Турбулентный режим наступает, когда силы инерции преобладают над силами вязкости и любое случайное возмущение усиливается потоком. В области $\mathrm{Re}_{кр}$ имеется узкая область, в которой течение является переходным, а режим называется ***перемежающимся***. В этой области ламинарный и турбулентный режим хаотически сменяют друг друга. На практике обычно принимают, что ламинарный режим сразу сменяется турбулентным, а область перемежаемости не учитывают.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ. МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ

Для решения гидрогазодинамических задач необходимо построить модель течения жидкости. С этой целью будем следовать алгоритму, изложенному в разд. 1.8. Рассмотрим упрощенную модель, описывающую поведение вязкой сжимаемой жид-

кости, называемую ***моделью элементарной струйки.*** Она характеризуется следующими основными допущениями:

1) течение жидкости реализуется в системе элементарной струйки (разд. 2.4.4);

2) движение жидкости — установившееся (разд. 2.4.4);

3) параметры потока постоянны в поперечных сечениях и изменяются только вдоль оси;

4) жидкость — сжимаемая, вязкая (разд. 2.8, 2.6);

5) диффузионным переносом массы, количества движения и энергии (разд.2.10) пренебрегаем и учитываем только конвективный перенос;

6) учитываются внутренняя и кинетическая энергия, потенциальная энергия давления и потенциальная гравитационная энергия положения, а также обмен массой количеством движения и энергией между системой и окружающей средой.

Получим уравнения, выражающие законы сохранения массы, количества движения и энергии применительно к элементарной струйке жидкости. При выводе уравнений будем следовать работе [9].

3.1. Уравнения неразрывности и расхода

Уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы вещества и является скалярным уравнением. В декартовых координатах $OXYZ$ определим систему элементарной струйки (рис. 3.1). Она ограничена цилиндрической боковой поверхностью трубки тока A элементарной струйки и сечениями F_1 и F_2.

Рассмотрим изменение массы в выбранной системе за время dt. Так как течение установившееся, система переместится вдоль трубки тока A из положения *1-2* в положение *1′–2′* (пунктирные сечения). Выделим три объема, образовавшихся в результате смещения системы:

$$dV_1 = F_1\, dl_1\,; \qquad (3.1)$$

$$dV_2 = F_2\, dl_2\,, \qquad (3.2)$$

и V_3, образованный поверхностью трубки тока A и сечениями *1′* и *2*. Объемы dV_1 и dV_2 на рис. 3.1 заштрихованы. Так как

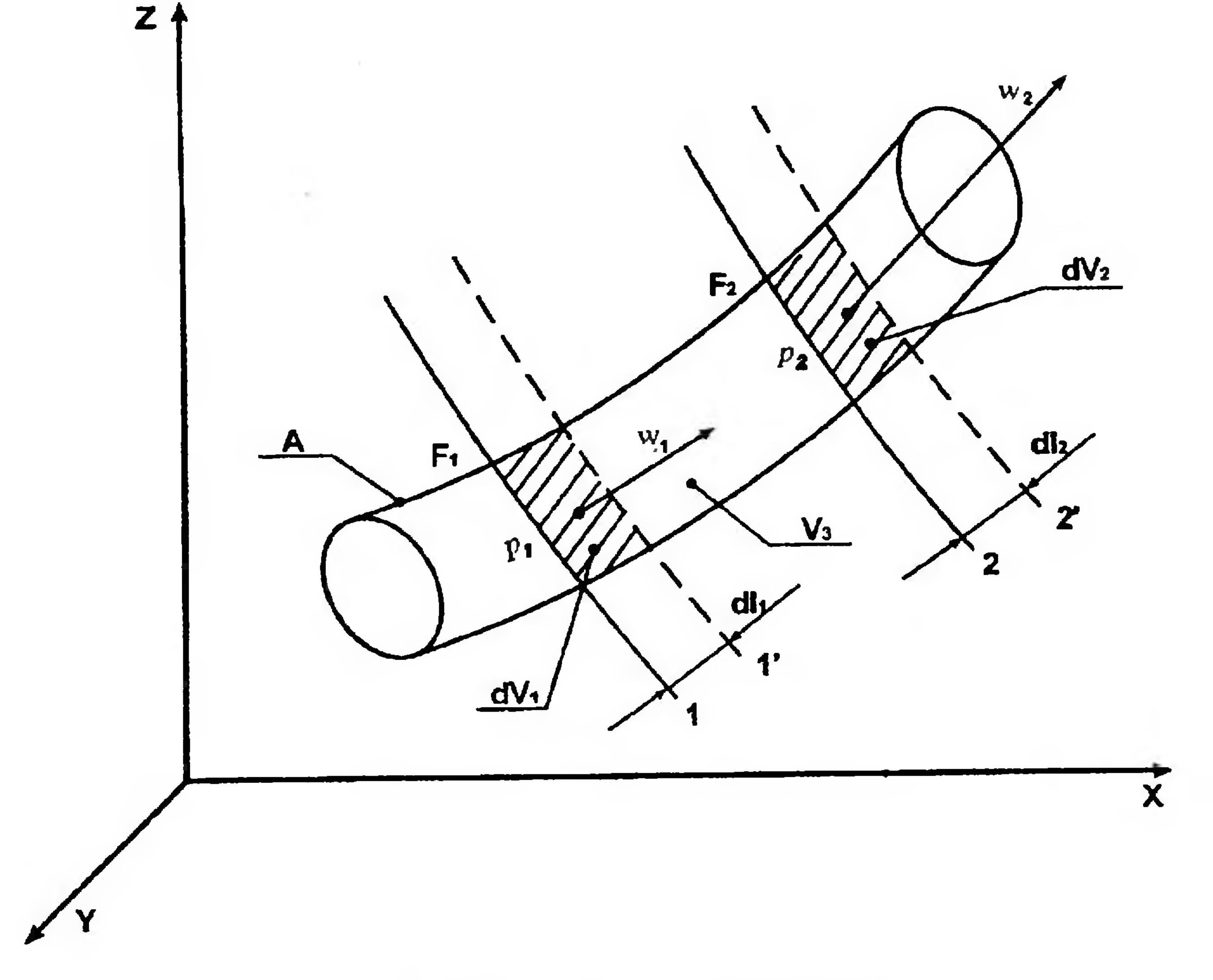


Рис. 3.1. Система элементарной струйки

параметры в поперечном сечении струйки не изменяются, то элементарные объемы жидкости dV_1 и dV_2 можно считать ***равновесными*** подсистемами и значения каждого из параметров состояния в них можно характеризовать одной величиной. В объеме dV_1 это скорость w_1 и плотность ρ_1, в объеме dV_2 — скорость w_2 и плотность ρ_2. Благодаря стационарности течения в объеме V_3 никаких изменений за время dt не произошло (объем остался на прежнем месте), поэтому изменения в объеме V_3 можно не учитывать, а ограничиться только изменениями в объемах dV_1 и dV_2. Вычислим массу жидкости, содержащуюся в объемах dV_1 и dV_2. Очевидно,

$$dl_1 = w_1\,dt \quad \text{и} \quad dl_2 = w_2\,dt. \tag{3.3}$$

Тогда

$$dm_1 = \rho_1\, dv_1 = \rho_1 F_1 l_1 = \rho_1 F_1 w_1\, dt; \tag{3.4}$$

$$dm_2 = \rho_2\, dv_2 = \rho_2 F_2 l_2 = \rho_2 F_2 w_2\, dt. \tag{3.5}$$

Если поверхность трубки тока непроницаема для массы, т. е. масса вещества не подводится между сечениями *1-2*, то в соответствии с законом сохранения массы вещества можно записать:

$$dm_1 = dm_2\,. \tag{3.6}$$

Тогда из (3.6) с учетом (3.4) и (3.5) получаем, сокращая на dt и учитывая,что сечения *1* и *2* выбраны произвольно:

$$\rho_1 w_1 F_1 = \rho_2 w_2 F_2 = \rho w F = \text{const}, \quad \text{кг/с}. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.7) выражает условие ***неразрывности течения*** для элементарной струйки и называется ***уравнением неразрывности***.

Величина

$$G = \frac{dm}{dt}, \quad \text{кг/с} \tag{3.8}$$

называется ***массовым секундным расходом***, или просто ***массовым расходом***;

уравнение

$$G = \rho w F, \quad \text{кг/с} \tag{3.9}$$

— уравнением ***массового расхода***, или просто ***расхода***, и выражает массу жидкости, протекающую через сечение F с параметрами ρ и w в единицу времени.

Величина

$$q_w = \rho w = G/F, \quad \text{кг/м}^2\cdot\text{с} \tag{3.10}$$

называется ***плотностью тока***. Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и уравнение неразрывности упрощается:

$$w_1 F_1 = w_2 F_2 = wF = \text{const}. \tag{3.11}$$

Величина

$$Q = wF, \ \text{м}^3/\text{с} \tag{3.12}$$

называется ***объемным расходом***. Уравнение (3.11) показывает, что в несжимаемой жидкости сохраняется и объемный расход. Вследствие этого, чтобы изменить скорость несжимаемой жидкости, достаточно изменить площадь сечения.

Дифференцируя уравнение расхода (3.9), можно получить дифференциальную форму уравнения расхода

$$dG = \rho w\, dF + \rho F\, dw + Fw\, d\rho \tag{3.13}$$

или

$$\frac{dG}{G} = \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho}. \tag{3.14}$$

Для случая постоянства массы в системе (3.14) имеет вид

$$\frac{dF}{F} + \frac{dw}{w} + \frac{d\rho}{\rho} = 0. \tag{3.15}$$

Итак, масса в гидрогазодинамике измеряется в единицу времени.

3.2. Уравнение количества движения

Уравнение количества движения выражает второй закон механики Ньютона применительно к течению жидкости и является векторным уравнением. Теорема об изменении количества движения (2-й закон Ньютона) формулируется так: "изменение количества движения системы равно импульсу суммы всех сил, действующих на систему", т. е.

$$\sum \vec{P}\, dt = d\sum m\vec{w}. \tag{3.16}$$

Получим уравнение для случая постоянной массы в системе струйки, т. е. при условии $G = \text{const}$, $dG/G = 0$. С этой целью рассмотрим изменение количества движения в системе струйки (см.рис. 3.1) за время dt. Используя условия стационарности течения, аналогично предыдущему выводу уравнения неразрыв-

ности достаточно рассмотреть изменения количества движения в объемах dV_1 и dV_2. Так как уравнение (3.16) — векторное, рассмотрим его проекцию на ось OX. Она имеет вид

$$\sum P_x \, dt = d\sum mw_x \, . \tag{3.17}$$

Тогда изменение количества движения в системе струйки в проекции на ось OX можно подсчитать как

$$d\sum mw_x = dm_2 \, w_{2x} - dm_1 \, w_{1x} \, . \tag{3.18}$$

С учетом постоянства массы в системе и выражения (3.8) из (3.18) получаем

$$d\sum mw_x = G_2 \, dt \, w_{2x} - G_1 \, dt \, w_{1x} = G \, (w_{2x} - w_{1x}). \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в (3.17) и сокращая на dt, окончательно получаем ***уравнение количества движения в проекции на ось OX***:

$$\sum P_x = G(w_{2x} - w_{1x}), \tag{3.20}$$

т.е. сумма всех сил, действующих на систему в проекции на ось OX, равна проекции на эту ось изменения секундного количества движения. Аналогично запишутся и проекции на другие оси:

$$\sum P_y = G(w_{2y} - w_{1y}) \quad \text{и} \quad \sum P_z = G \, (w_{2z} - w_{1z}). \tag{3.21}$$

Произведение массового расхода жидкости G (кг/с) на скорость потока w (м/с) в данном сечении, т. е. Gw (кгм/с^2), называется ***секундным количеством движения жидкости*** в данном сечении.

Уравнения (3.20), (3.21) показывают, что жидкость в системе струйки движется с ускорением только в том случае, если сумма всех сил, приложенных к системе струйки, отлична от нуля.

Особенностью уравнения количества движения является возможность определения суммы всех сил, действующих на систе-

му, на основе ее параметров на границах системы в сечениях *1* и *2*.

3.3. Уравнение энергии

Уравнение энергии выражает закон сохранения и превращения энергии при движении жидкости в системе элементарной струйки и является скалярным уравнением.

3.3.1. Уравнение энергии в тепловой форме. Рассмотрим изменение энергии в системе струйки за время dt (рис. 3.1). Будем полагать, что масса системы не изменяется, система может обмениваться с окружающей средой энергией в форме тепла $dQ_{н}$ и технической работой $dL_{тех}$. Под *технической работой* будем понимать работу турбины или компрессора. Энергия $dQ_{н}$ в форме тепла считается положительной, если подводится к системе, и отрицательной, если отводится от системы. Техническая работа $dL_{тех}$ считается положительной, если система (например, в турбине) совершает ее над окружающей средой, и отрицательной, если окружающая среда совершает работу над системой (например, в компрессоре).

Обмен энергией и совершение работы происходит на участке между сечениями *1'* и *2*. Так как система струйки, вообще говоря, является неравновесной системой, то на участке *1'-2* могут иметь место неравновесные процессы и проявляться диссипативные эффекты, т. е. в результате действия вязкости (внутреннего трения) может совершаться работа трения $dL_{тр}$, которая затем реализуется в форме энергии тепла $dQ_{тр}$, воспринимаемой газом. Следует отметить, что часть работы трения может пойти на увеличение кинетической энергии сжимаемой жидкости, но остается в системе.

Будем полагать, что элементарный объем струйки $dV = Fdl$ обладает удельной (на единицу массы) внутренней энергией u, кинетической $w^2/2$, потенциальной энергией давления p/ρ, потенциальной (гравитационной) энергией положения gz. Здесь g, м/с^2 — ускорение силы тяжести; z — вертикальная координата положения объема. Тогда полная удельная энергия e элементарного объема будет равна

$$e = u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz, \text{ Дж/кг}, \tag{3.22}$$

а полная энергия элементарного объема

$$dE = \left(u + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) dm, \quad \text{Дж}. \tag{3.23}$$

Тогда изменение энергии в системе струйки за счет обмена энергией в форме тепла $dQ_н$ технической работы $dL_{тех}$ и выделения в системе тепла трения $dQ_{тр}$ запишется как

$$dQ_н + dQ_{тр} - dL_{тех} = \left(u_2 + \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} + gz_2\right) dm_2 -$$

$$- \left(u_1 + \frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} + gz_1\right) dm_1 + dL_{тр}. \tag{3.24}$$

С учетом условия сохранения массы в системе, т. е. $dm_1 = dm_2 = dm$, обозначая

$$dQ = dQ_н + dQ_{тр}, \tag{3.25}$$

получим

$$dQ - dL_{тех} = \left((u_2 - u_1) + \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + g(z_2 - z_1)\right) dm +$$

$$+ dL_{тр}, \quad \text{Дж}. \tag{3.26}$$

Уравнение (3.26) является уравнением энергии в тепловой форме. Однако в гидрогазодинамике более употребительна форма уравнения энергии для удельных параметров. Введем удельные параметры:

$$q = dQ/dm, \quad \text{Дж/кг}; \tag{3.27}$$

$$l_{тех} = dL_{тех}/dm, \quad \text{Дж/кг}; \tag{3.28}$$

$$q_н = dQ_н/dm \quad \text{Дж/кг}; \tag{3.29}$$

$$dl_{\text{тр}} = dL_{\text{тр}}/dm, \quad \text{Дж/кг}. \qquad (3.30)$$

Тогда уравнение энергии примет вид

$$q - l_{\text{тех}} = (u_2 - u_1) + \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) +$$

$$+ g(z_2 - z_1) + l_{\text{тр}}, \quad \text{Дж/кг} \qquad (3.31)$$

или с учетом $q_{\text{тр}} = l_{\text{тр}}$

$$q_{\text{н}} - l_{\text{тех}} = (u_2 - u_1) + \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + g(z_2 - z_1).$$

Используя выражение для энтальпии (2.65) $i = u + p/\rho$, окончательно получаем

$$q_{\text{н}} - l_{\text{тех}} = (i_2 - i_1) + \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1), \quad \text{Дж/кг}. \qquad (3.32)$$

Левая часть уравнения характеризует энергетическое взаимодействие системы струйки с окружающей средой, правая часть — изменение энергии в системе (разница энергий на выходе из системы и входе в систему).

Дифференциальное уравнение энергии в тепловой форме для удельных параметров можно получить, например из (3.31), если неограниченно сблизить сечения *1* и *2*. Тогда

$$dq - dl_{\text{тех}} = du + d\,\frac{w^2}{2} + d\,\frac{p}{\rho} + gz + dl_{\text{тр}}\,. \qquad (3.33)$$

Приближение для течения газа. Для газовых течений можно пренебрегать энергий положения gz и использовать уравнение энергии в виде

$$q_{\text{н}} - l_{\text{тех}} = (i_2 - i_1) + \left(\frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2}\right), \quad \text{Дж/кг}. \qquad (3.34)$$

3.3.2. Уравнение энергии в механической форме. Обобщенное уравнение Бернулли. Общее количество тепла q (Дж/кг),

подводимое к неподвижному газу или газу, движущемуся в системе координат, связанной с системой струйки, определяется ***первым законом термодинамики***:

$$dq = dq_{\text{н}} + dq_{\text{тр}} = du + pd\nu, \tag{3.35}$$

где

$$\nu = 1/\rho; \tag{3.36}$$

$pd\nu$ — работа деформации газа.

Перепишем выражение (3.33) в виде

$$dq = du + pd\nu + \nu dp + d\,(w^2/2) + gdz + dl_{\text{тех}} + dl_{\text{тр}} \tag{3.37}$$

и вычтем из него (3.35) в виде $dq = du + pd\nu$.

В результате получим уравнение

$$-\nu dp = dw^2/2 + gdz + dl_{\text{тех}} + dl_{\text{тр}}, \tag{3.38}$$

которое называется ***дифференциальным уравнением энергии в механической форме, или обобщенным уравнением Бернулли.***

Особенностью полученного уравнения является, во-первых, то, что оно явно не содержит энергии в форме тепла, а во-вторых, для получения интегральной формы этого уравнения необходимо знать связь p и ν или p и ρ, т. е. знать ***уравнение процесса изменения состояния.***

Значение интеграла

$$\int_1^2 \nu\, dp = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} \tag{3.39}$$

зависит от процесса изменения состояния системы между состояниями *1* и *2*. Однако для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$, (2.58)) уравнение (3.38) легко интегрируется и обычно записывается в виде

$$gz_1 + p_1/\rho + w_1^2/2 = gz_2 + p_2/\rho + w_2^2/2 + l_{\text{тех}} + l_{\text{тр}}, \quad \text{Дж/кг}. \tag{3.40}$$

3.4. Уравнение качества процесса

Три закона сохранения и определяющее уравнение дают нам четыре уравнения для определения как минимум пяти параметров струйки p, ρ, T, w, F. Поэтому для получения замкнутой системы необходимо иметь еще одно уравнение, и таким уравнением может быть уравнение качества процесса. ***Уравнение качества процесса*** определяет альтернативу между обратимым и необратимым процессом. Наиболее просто этот вопрос решается для энергетически изолированной системы. Как было показано в разд. 2.11, необратимость процесса можно характеризовать потерей работоспособности, или эксергии, с помощью закона Гюи-Стодолы (2.91):

$$\nabla l_{2-1}^{\max} = T_0 (s_2 - s_1).$$

Т. е. для энергетически изолированного течения ***условие обратимости*** процесса можно записать как $\nabla l_{2-1}^{\max} = 0$ или $s_2 = s_1$, а ***условие необратимости*** — в виде $\nabla l_{2-1}^{\max} > 0$ или $s_2 - s_1 = f_{\text{дис}} > 0$, где $f_{\text{дис}}$ — некоторая функция, которая учитывает диссипацию энергии вследствие внутреннего трения и позволяет подсчитать рост энтропии в процессе. В общем случае альтернатива уравнения качества может быть записана следующим образом:

для обратимых процессов

$$ds_{\text{тр}} = 0, \tag{3.41}$$

для необратимых процессов

$$ds_{\text{тр}} > 0. \tag{3.42}$$

По второму закону термодинамики [4],

$$ds = dq/T, \tag{3.43}$$

по первому закону термодинамики (3.35) $dq = du + pd\nu$.

Интегрирование (3.43) и (3.35) позволяет получить следующие формулы, связывающие изменение энтропии в процессе изменения состояния совершенного газа:

$$s_2 - s_1 = C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{v_2}{v_1} =$$

$$= C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1}. \qquad (3.44)$$

Условия (3.41) или (3.42), будучи подставлены в (3.44), дадут необходимое дополнительное соотношение между параметрами состояния и позволят замкнуть систему уравнений для модели струйки.

Следует отметить, что вопрос о дополнительном уравнении решается достаточно просто только для обратимых процессов, и то только в изолированной системе. Это связано с определенными отрицательными свойствами энтропии [16]. В первую очередь, это неотличимость роста энтропии при подводе энергии в форме тепла от ее роста вследствие необратимости процесса и подводе тепла за счет работы внутреннего трения. Во-вторых, невозможность непосредственного измерения энтропии. Далее, энтропия есть параметр состояния, характеризующий свойства системы в *условиях равновесия*. Поэтому при использовании ее для характеристики неравновесных процессов ответ получается в форме неравенства $ds > 0$ для необратимых процессов. Чтобы получить уравнение качества процесса для случая необратимого процесса, необходимо уметь определять скорость возникновения энтропии диссипации в системе:

$$C = \frac{ds_{\text{тр}}}{V\,dt}, \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{К)}. \qquad (3.45)$$

Методы расчета C впервые были предложены Онзагером [21] и получили дальнейшее развитие в термодинамике необратимых процессов [16-20]. В гидрогазодинамике эти методы пока не нашли достаточного применения. Это связано с их сложностью, с одной стороны, а с другой стороны — гидрогазодинамика выработала другие, вполне эффективные, способы решения этой проблемы. О них будет рассказано в последующих главах.

И еще одно важное замечание к выбору альтернативы уравнения качества процесса. Выражение, связывающее напряжения и скорости деформации, содержит конвективные составляющие ускорения. Поэтому любое ускоренное движение жид-

кости связано с действием вязких нормальных и касательных напряжений и, строго говоря, делает процесс необратимым. Однако для практических целей, когда эта необратимость невелика, или для предельной оценки эффективности какого-либо устройства (например, устройства для разгона потока или др.), или при реализации процесса целесообразно использование альтернативы обратимого процесса.

3.5. Простейшая модель элементарной струйки с использованием статических параметров

Сделаем следующие дополнительные допущения.

1. Кривизна оси струйки мала, и ось можно считать прямолинейной. Ось струйки обозначим индексом x, и

$$w_x = w. \tag{3.46}$$

2. Течение в струйке энергетически изолированное, т.е.

$$q_{\text{н}} = l_{\text{тех}} = 0. \tag{3.47}$$

3. Процесс обратимый (3.41):

$$ds_{\text{тр}} = 0.$$

Тогда уравнения модели, которую обозначим номером *1*, записанные в интегральной форме для двух состояний *1* и *2*, будут иметь следующий вид:

1) уравнение неразрывности (3.7)

$$\rho_1 w_1 F_1 = \rho_2 w_2 F_2 ;$$

2) уравнение количества движения (3.20) с учетом (3.46)

$$\sum P = G\,(w_2 - w_1) ; \tag{3.48}$$

3) уравнение энергии (3.34) с учетом (3.47)

$$i_2 - i_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0; \tag{3.49}$$

4) определяющее уравнение — уравнение состояния совершенного газа для двух сечений (2.63):

$$p_1 = \rho_1 R T_1, \quad p_2 = \rho_2 R T_2 ;$$

5) уравнение качества процесса (3.44) — уравнение изоэнтропы (см. п. 3)

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}} ;$$

6) уравнение массового расхода (3.9)

$$G = \rho w F;$$

7) уравнения для энтальпии:

$$i_1 = C_p T_1, \quad i_2 = C_p T_2 . \qquad (3.50)$$

Система уравнений представляет собой простейшую модель элементарной струйки постоянного массового расхода для расчета обратимых процессов в энергетически изолированной системе.

Рассмотрим пример использования модели для расчета силы, действующей на диффузор-устройство, используемое для торможения потока.

Задача 1. Пусть имеется конический диффузор (рис. 3.2,*а*). F_1 — площадь на входе в диффузор; F_2 — на выходе из диффузора. Заданы параметры рабочего тела на входе w_1, p_1, T_1, ρ_1 и физические свойства рабочего тела, k, R, C_p. Определить силу P_x, с которой рабочее тело (газ) действует на стенки диффузора.

Анализ задачи. При течении газа в диффузоре от сечения F_1 до сечения F_2 на его внутреннюю поверхность по нормали к ней действует переменное статическое давление. Это давление определяет суммарную силу P_n, действующую по нормали к боковой поверхности диффузора. Сила P_n численно равна

Рис. 3.2
a — к решению задачи 3.1; $б$ — гидрогазодинамическая система

$$P_n = \int_1^2 p dF. \tag{3.51}$$

Примем за положительное направление оси OX направление, совпадающее с вектором скорости w_1 на входе в диффузор. Тогда искомая сила P_x будет равна проекции силы P_n на ось OX, и для вычисления P_n необходимо знать распределение давления p вдоль диффузора. Однако использование уравнения количества движения позволяет сразу определить силу P_x, если известны параметры на входе и выходе из системы, в частности, расход газа и скорости (см. (3.46)). Имеющиеся остальные шесть уравнений модели 1 позволяют определить шесть параметров на выходе: p_2, ρ_2, T_2, i_2, w_2 и G и воспользоваться уравнением (3.48) для определения P_x.

Рассматриваемая задача относится к классу прямых задач (разд. 1.7) и требует проверки выполнения граничного условия по давлению (2.101) или (2.102). Полагая, что рассматриваемая задача соответствует допущениям, отвечающим элементарной струйке и ее модели 1, применим модель 1 для решения этой задачи.

Решение задачи. Так как уравнения модели могут быть применены только к течению газа, а не к устройству — диффузору, выделим газодинамическую систему. Она показана на рис. 3.2,*а* пунктиром и отдельно вынесена на рис. 3.2,*б*. Решение начинаем с поиска силы. Сила может быть найдена только из уравнения количества движения. Поэтому определим силы, действующие на систему, и воспользуемся уравнением (3.48). Прежде всего на систему действуют силы давления p. Они действуют против направления нормали к сечению, т. е. всегда направлены внутрь системы. Давление p_1 на сечение F_1 создает силу p_1F_1 , давление p_2 на сечении F_2 — силу p_2F_2 и переменное давление p на боковой поверхности — силу P_n с проекцией P_x. Напомним, что искомой силой является сила $(-P_x)$. Так как процесс обратимый, то вязкие напряжения (например, касательное напряжение на стенке τ) не учитываются. Тогда уравнение (3.48) имеет вид

$$p_1F_1 - p_2F_2 + P_x = G\,(w_2 - w_1), \tag{3.52}$$

и искомая сила определяется как

$$-P_x = p_1F_1 - p_2F_2 - G(w_2 - w_1), \qquad (3.53)$$

Построим алгоритм определения параметров G, P_x, w.

Из (2.63) находим $p_2 = \rho RT_2$. Скорость w_2 — из (3.7) с учетом (3.9):

$$w_2 = \rho_1 w_1 F_1 / \rho_2 F_2 = G/\rho_2 F_2. \qquad (3.54)$$

Плотность ρ_2 — из (3.44),

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{k-1}, \qquad (3.55)$$

и температуру T_2 — выражения из (3.49), если в него подставить уравнения (3.50), (3.54), (3.55):

$$T_2 = T_1 - \frac{w_1^2}{2C_p} + \frac{G^2 T_1^{2(k-1)}}{2C_p \rho_1^2 F_2^2}. \qquad (3.56)$$

Последнее уравнение является трансцендентным и решается итерационным или графическим способом. Расход G газа — из (3.9): $G = \rho_1 w_1 F_1$. Плотность ρ_1 — из (2.63): $\rho_1 = p_1/RT_1$.

Выполняя расчет в обратной последовательности в соответствии с приведенным алгоритмом, получаем решение искомой задачи.

Анализ полученных результатов

1. Если за диффузором расположено некоторое устройство или на выходе из системы задано давление в окружающей среде $p_н$, то необходимо проверить реализуемость рассчитанного режима (условия (2.101) и (2.102)). С этой целью определяем число M_2 на выходе из системы: $M_2 = w_2/a_2$ (2.100), где $a_2 = \sqrt{kRT_2}$ — скорость звука (2.99). Пусть $M_2 < 1$. Так как $M_2 < 1$, то должно выполняться условие (2.101), а именно $p_2 = p_н$. Если это условие реализуется, то рассчитанный режим

будет реализовываться в данном устройстве. В противном случае необходимо задать давление на выходе $p_2 = p_н$ и рассчитать скорость на входе w_1, при которой реализуется течение с заданными значениями p_1 и T_1.

2. Для получения решения приходится решать трансцендентное уравнение.

3. Модель не позволяет предсказывать изменения параметров в устройстве, например, будет ли скорость увеличиваться или уменьшаться и т. д.

Недостатки модели, отмеченные во втором и третьем пунктах, могут быть устранены, если использовать так называемые параметры торможения.

4. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ ТОРМОЖЕНИЯ

4.1. О количественных и качественных показателях энергии

В разд.2.10 было показано, что для общей характеристики энергии рабочего тела в каком-либо состоянии *1* необходимо использовать два параметра, выраженные формулами (2.86) и (2.89) соответственно:

$$e_1 = C_v T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2},$$

характеризующий ***полную энергию*** единицы массы системы,

$$l_{полезн}^{max} = (e_1 - e_0) - T_0 (S_1 - S_0),$$

характеризующий пригодность энергии для получения от нее работы в условиях взаимодействия системы и окружающей среды, параметры которой определяются величинами e_0, T_0, S_0.

Целесообразно параметр e, характеризующий удельную полную энергию системы, именовать ***количественным*** показателем

энергии, а параметр $l_{\text{полезн}}^{\max}$, характеризующий удельную работоспособность (или эксергию) системы — *качественным* показателем энергии.

Существенным недостатком обоих параметров является отсутствие их непосредственной измеримости, и следовательно, оперативного контроля за ними. Хотя, измеряя параметры процесса (температуру, давление, скорость), можно эти характеристики рассчитывать. Газовая динамика позволяет получить характеристики количества и качества энергии, лишенные указанного недостатка, и попутно отказаться от использования такого сложного и абстрактного понятия, как энтропия.

4.2. Параметры торможения

4.2.1. Энтальпия и температура торможения. Рассмотрим энергетически изолированное течение в системе элементарной струйки с постоянной массой. Уравнение энергии в тепловой форме для этого случая имеет вид (3.49)

$$i_2 - i_1 + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0.$$

Перепишем его с учетом того, что сечения *1* и *2* выбираются произвольно:

$$i_1 + \frac{w_1^2}{2} = i_2 + \frac{w_2^2}{2}. \qquad (4.1)$$

Величина e (см. 2.86)

$$e = i + \frac{w^2}{2} = C_p T + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \qquad (4.2)$$

характеризует полную энергию на единицу массы элементарного объема струйки. В газовой динамике эта величина называется *полной энтальпией или энтальпией торможения* и обозначается i^*:

$$i^* = i + \frac{w^2}{2}. \qquad (4.3)$$

Происхождение термина объясняется следующим. Если струйку энергетически изолированно затормозить, то кинетическая энергия перейдет в тепловую энергию, т. е. при $w = 0$

$$i^* = i. \tag{4.4}$$

Характер процесса торможения (обратимый или необратимый) значения не имеет, т. к. система в процессе торможения энергетически изолирована, и все эффекты необратимости перейдут в тепло.

Температура, определяющая полную энергию единицы массы системы, т. е. энтальпию торможения, называется ***полной температурой***, или ***температурой торможения***, и обозначается как T^*:

$$T^* = \frac{i^*}{C_p}. \tag{4.5}$$

или с учетом (3.50)

$$T^* = T + \frac{w^2}{2C_p}. \tag{4.6}$$

Очевидно, что при полном энергетически изолированном торможении струйки в соответствии с (4.6) вся кинетическая энергия перейдет в тепловую и газ примет температуру торможения, т. е. при $w = 0$

$$T^* = T. \tag{4.7}$$

Аналогично энтальпии характер процесса торможения (при постоянной теплоемкости C_p) не влияет на величину T^*. Таким образом, наряду с энтальпией торможения i^* температура торможения T^* совершенного газа может служить показателем полной энергии струйки в любом сечении.

4.2.2. Уравнения энергии в газодинамической форме. Подставив (4.3) в уравнение энергии для газа (3.34), получим

$$q_{н} - l_{тех} = i_2^* - i_1^*, \quad Дж/кг, \tag{4.8}$$

а с учетом (4.5)

$$q_н - l_{тех} = C_p\,(T_2^* - T_1^*), \tag{4.9}$$

или в дифференциальной форме

$$dq_н - dl_{тех} = di^* = C_p\,dT^*. \tag{4.10}$$

Будем называть уравнения (4.8), (4.9), (4.10) ***уравнениями энергии в газодинамической форме.*** Эти уравнения показывают, что параметры торможения i^* и T^* изменяются только при энергетическом взаимодействии системы с окружающей средой, когда или $q_н \neq 0$, или $l_{тех} \neq 0$, или $q_н$ и

$$l_{тех} \neq 0. \tag{4.11}$$

Другим важным свойством температуры торможения является ее измеримость. Термопара или термометр, помещенные в газовый поток, будут измерять температуру торможения, т. к. газ вблизи поверхности всегда будет заторможен (см. п. 8.14).

4.2.3. Давление торможения. Рассмотрим энергетически изолированную систему струйки газа с постоянным расходом, совершающую изоэнтропический процесс, т. е. соответствующую условиям

$$dq_н = dl_{тех} = 0 \quad и \quad ds_{тр} = 0. \tag{4.12}$$

Для анализа процесса воспользуемся уравнением энергии в механической форме — обобщенным уравнением Бернулли в дифференциальной форме (3.38):

$$-\frac{dp}{\rho} = \frac{dw^2}{2} + g\,dz + dl_{тех} + dl_{тр}. \tag{4.13}$$

Для случая течения газа пренебрегаем потенциальной энергией положения, т. е.

$$g\,dz = 0. \tag{4.14}$$

Кроме того, условие $dS_{тр} = 0$ означает, что и работа трения

$$dl_{тр} = 0. \tag{4.15}$$

Тогда обобщенное уравнение Бернулли в дифференциальной форме для энергетически изолированной системы газовой струйки, совершающей изоэнтропийный процесс, будет иметь вид

$$-\frac{dp}{\rho} = \frac{dw^2}{2}. \tag{4.16}$$

Поскольку связь между давлением и плотностью в изоэнтропийном процессе задается уравнением изоэнтропы

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const}, \tag{4.17}$$

то (4.16) может быть проинтегрировано для двух состояний процесса *1* и *2*. Из (3.76) имеем

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1/k} \tag{4.18}$$

и интеграл

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_1^{1/k}}{\rho_1} \int_1^2 \frac{dp}{p^{1/k}} = \frac{k}{1-k} \frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{k-1/k}\right]. \tag{4.19}$$

Интегрирование (4.16) с учетом (4.19) дает

$$\frac{k}{1-k} \frac{p_1}{\rho_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{k-1/k}\right] + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = 0. \tag{4.20}$$

Полученное уравнение есть ***интегральная форма уравнения энергии в механической форме для случая энергетически изолированного изоэнтропийного процесса.***

Рассмотрим на основе (4.20) случай полного изоэнтропийного торможения энергетически изолированной струйки от w_1 до $w_2 = 0$. При этом кинетическая энергия газа перейдет в потенциальную энергию давления. Полученное в результате такого

процесса давление p_2 обозначается как p_2^* и носит название ***полного давления,*** или ***давления торможения,*** т. е.

$$p_2 = p_2^*. \qquad (4.21)$$

В силу произвольности выбранных сечений струйки запишем (4.20) как

$$\frac{k}{1-k}\frac{p}{\rho}\left[\left(\frac{p^*}{p}\right)^{k-1/k} - 1\right] = \frac{w^2}{2}. \qquad (4.22)$$

Отсюда

$$p^* = p\left(1 + \frac{k-1}{2k}\frac{w^2}{p/\rho}\right)^{k/k-1}. \qquad (4.23)$$

Это основное уравнение для расчета давления торможения p^* по параметрам струйки в сечении w, p, ρ. С целью выяснения существа полученного параметра p^* рассмотрим последнее выражение системы (3.44), связывающее изменение энтропии с параметрами состояния p и T (см. (3.44)): $s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2}{T_1} - R\ln\frac{p_2}{p_1}$. Совершим изоэнтропийный процесс перехода к параметрам торможения в состоянии *1* и в состоянии *2*. При этом значение энтропии в состоянии *1* и в состоянии *2* не изменится. Тогда из (3.44) получим

$$s_2 - s_1 = C_p \ln\frac{T_2^*}{T_1^*} - R\ln\frac{p_2^*}{p_1^*}. \qquad (4.24)$$

Отсюда

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = e^{-\left(\frac{s_2 - s_1}{R} + \frac{k}{k-1}\ln\frac{T_1^*}{T_2^*}\right)}, \qquad (4.25)$$

где $e = 2{,}72$ — основание натурального логарифма.

В соответствии с (4.9) изменение T^* характеризует энергетическое взаимодействие системы и окружающей среды, а изменение энтропии s в соответствии с (2.90) характеризует уменьшение (потери) работоспособности или эксергии, т. е. степень необратимости процесса. Уравнение (2.90), характеризующее изменение работоспособности системы, с учетом (4.2), (4.3) и (4.24) запишется в виде

$$\Delta l_{1-2}^{\max} = C_p\,(T_2^* - T_1^*) - T_0 \left(C_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} \right), \tag{4.26}$$

а уравнение (2.91), характеризующее потери работоспособности системы от необратимости, — как

$$\nabla l_{1-2}^{\max} = T_0 \left(C_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} \right). \tag{4.27}$$

Таким образом, в энергетически изолированной системе уменьшение давления торможения p^* $(p_2^* < p_1^*)$ будет однозначно характеризовать потери работоспособности, или эксергии и, следовательно, степень необратимости процесса. Очевидно, в данном случае (энергоизолированности системы) энтропия в соответствии со вторым законом термодинамики уменьшаться не может, и, следовательно, не может возрастать давление торможения. В общем случае, т. е. в энергетически неизолированной системе, давление торможения также может служить показателем качества процесса. Покажем это.

Преобразуем скобку в выражении (4.27):

$$\nabla l_{1-2}^{\max} = T_0 \left(C_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_{2s}^*}{p_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_{2s}^*} \right) = -\,T_0\, R \ln \frac{p_2^*}{p_{2s}^*}. \tag{4.28}$$

Здесь

$$p_{2s}^* = p_1^* \left(\frac{T_2^*}{T_1^*} \right)^{\frac{k}{k-1}} \; — \tag{4.29}$$

давление торможения при изоэнтропийном процессе изменения энергии системы. В этом случае $C_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_{2s}^*}{p_1^*} = 0.$

Из (4.28) следует, что потери эксергии, т. е. качество энергии, однозначно определяются давлением торможения. Поэтому ***давление торможения*** является ***эксергетическим параметром***.

Для энергоизолированной системы

$$p_2^* \le p_{2s}^*, \tag{4.30}$$

причем знак равенства соответствует обратимому процессу, а знак неравенства — необратимому.

Введем параметр

$$\sigma_s = \frac{p_2^*}{p_{2s}^*}, \tag{4.31}$$

которым и будем характеризовать величину необратимости процесса изменения состояния в энергетически изолированной системе. В обратимом процессе $\sigma_s = 1$, в необратимом $\sigma_s < 1$. Для большинства газодинамических устройств величину σ_s можно рассчитывать или воспользоваться экспериментальными данными.

К сказанному о давлении торможения следует добавить, что оно, как и температура и торможения, легко может быть измерено в системе с помощью специального устройства, называемого *трубкой Пито* (см. гл. 8).

4.2.4. Общие и отличительные свойства параметров торможения T^* и p^*. Уравнение состояния совершенного газа справедливо для заторможенных параметров. Поэтому величина

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} \tag{4.32}$$

называется ***плотностью заторможенного газа***. Она равна тому значению плотности газа в системе, которое газ принима-

ет в энергетически изолированном изоэнтропийном процессе полного торможения потока.

Изложенное в разд. 4.2.1 и 4.2.2 позволяет сформулировать следующие общие свойства параметров торможения давления и температуры. Оба параметра:

— характеризуют энергию в сечении струйки, могут быть непосредственно измерены в газовом потоке,

— изменяются при изменении полной энергии.

Отличительные свойства температура торможения:

— T^* является показателем количества энергии, характеризует полную удельную (на единицу массы) энергию, а будучи умноженной на C_p, определяет численное значение полной энергии, равное энтальпии торможения. Чем больше T^*, тем больше полная энергия;

— изменение T^* не зависит от характера процесса (обратимый или необратимый), а определяется только энергетическим взаимодействием с окружающей средой;

— T^* сохраняет постоянное значение в разных сечениях струйки в энергетически изолированном процессе.

Отличительные свойства давления торможения:

— p^* является показателем качества энергии и характеризует работоспособность или эксергию в сечении струйки: чем больше p^*, тем больше эксергия;

— изменение p^* зависит от характера процесса (обратимый или необратимый), а также от энергетического взаимодействия системы и окружающей среды;

— p^* является показателем обратимости процесса аналогично энтропии: сохраняет постоянное значение в различных сечениях струйки в обратимых процессах в энергетически изолированной системе и уменьшается при необратимых процессах.

Таким образом, ***полная удельная энергия*** в любом сечении струйки, равная энтальпии торможения i^*,

$$i^* = C_p T^*, \quad \text{Дж/кг}, \tag{4.33}$$

а удельная *работоспособность, или эксергия,* в любом сечении струйки

$$l_{\text{полез}}^{\max} = (C_p T^* - C_p T_0^*) - C_p T_0 \left(\ln \frac{T^*}{T_0^*} - \frac{k-1}{k} \ln \frac{p^*}{p_0^*} \right), \quad \text{Дж/кг}, \quad (4.34)$$

где индекс 0 означает параметры окружающей среды.

4.3. Число Маха. Приведенная скорость, относительная скорость. Критические параметры

В газовой динамике большую роль играют процессы преобразования энергии. Ускорение потока требует преобразования внутренней энергии и энергии давления в кинетическую, а торможение — преобразования кинетической энергии в энергию давления и внутреннюю энергию. Для осуществления такого преобразования необходимы различные воздействия, зависящие от состояния потока и его скоростного режима течения. В качестве меры преобразования энергии используются параметры, основанные на использовании таких понятий, как скорость звука, критическая скорость звука и максимальная скорость потока.

4.3.1. Скорость звука и число Маха. Скорость звука a, являющаяся скоростью распространения слабых возмущений давления, в соответствии с (2.99) равна $a = \sqrt{kp/\rho} = \sqrt{kRT}$. Параметром, определяющим степень преобразования энтальпии, характеризующей термическую (внутреннюю энергию и энергию давления) энергию, является число Маха $\text{M} = \frac{w}{a}$ (2.100).

Покажем, что число М определяет соотношение между кинетической и термической энергией (энтальпией). Полная энергия в сечении струйки характеризуется энтальпией торможения i^*, которая определяется уравнением (4.3) $i^* = i + \frac{w^2}{2}$.

Преобразуем (4.3), используя выражения $i = C_p T$ (3.50) и $C_p = \frac{kR}{k-1}$, (из (2.68) и (2.69):

$$i^* - i = \frac{w^2}{2} \qquad (4.35)$$

и

$$\frac{i^* - i}{i} = \frac{w^2}{2i} = \frac{w^2}{2C_pT} = \frac{k-1}{2}\,\frac{w^2}{kRT} = \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2. \qquad (4.36)$$

Левая часть полученного выражения представляет собой отношение кинетической энергии струйки в сечении к энтальпии, а правая часть пропорциональна M^2. Таким образом число М является критерием подобия для газовых течений, характеризующим степень преобразования энтальпии в кинетическую энергию. Используя (3.50) и (4.36), получим

$$\frac{T^* - T}{T} = \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2. \qquad (4.37)$$

Отсюда

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2. \qquad (4.38)$$

4.3.2. Критические параметры. Поскольку T может меняться от $T = 0$ до $T = T^*$, из формулы (4.38) следует, что число М изменяется в диапазоне от 0 до бесконечности и при этом разделяет все режимы по скорости на две области: дозвуковую — при $\mathrm{M} < 1$ и сверхзвуковую — при $\mathrm{M} > 1$. Границей, разделяющей эти режимы, служит значение $\mathrm{M} = 1$. Этот режим называется ***критическим***, а параметры потока, соответствующие этому значению числа М ($\mathrm{M} = 1$), — ***критическими параметрами***. В частности, определим критическую температуру $T_{\text{кр}}$ из формулы (4.38), полагая $\mathrm{M} = 1$, $T = T_{\text{кр}}$:

$$T_{\text{кр}} = T^* \frac{2}{k+1}. \qquad (4.39)$$

Критической температуре соответствует ***критическая скорость звука*** $a_{\text{кр}}$, вычисляемая по этой температуре, т. е.

$$a_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}}\,, \tag{4.40}$$

или, с учетом (4.39),

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1}RT^*}. \tag{4.41}$$

Скорость потока $w_{кр}$, соответствующая критическому режиму М = 1 и равная скорости звука (критической скорости звука), называется ***критической скоростью потока***, т. е.

$$w_{кр} = a_{кр}\,. \tag{4.42}$$

4.3.3. Приведенная скорость. Критическая скорость потока $w_{кр}$ или критическая скорость звука $a_{кр}$ также могут служить мерой преобразования кинетической энергии и критерием, определяющим критический режим. Воспользуемся (4.35) и, разделив его на величину

$$i_{кр} = C_p T_{кр}\,, \tag{4.43}$$

получим, с учетом (2.68)

$$\frac{i^* - i}{i_{кр}} = \frac{w^2}{2i_{кр}} = \frac{w^2}{2C_p T_{кр}} = \frac{k-1}{2}\,\frac{w^2}{kRT_{кр}} = \frac{k-1}{2}\,\frac{w^2}{a_{кр}^2}\,. \tag{4.44}$$

Отношение скорости потока w к критической скорости звука $a_{кр}$ обозначается λ и называется ***приведенной скоростью*** [9] или коэффициентом скорости [8]:

$$\lambda = \frac{w}{a_{кр}}\,. \tag{4.45}$$

Критическая скорость звука $a_{кр}$ зависит только от температуры торможения T^* (и, конечно, от теплофизических характеристик k и R) и так же, как и T^*, сохраняет свое значение в энергетически изолированных течениях. Поэтому использование в качестве критерия режима и показателя преобразования кинетической энергии приведенной скорости λ, а не числа М, в

целом ряде случаев более удобно. Используя (3.50) и (4.43), из (4.44) получаем

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2. \tag{4.46}$$

Так как T изменяется от 0 до T^*, то диапазон изменения λ от 0 до

$$\lambda_{max} = \sqrt{k+1/k-1}. \tag{4.47}$$

Из (4.38) и (4.46) нетрудно получить соотношения, связывающие два важнейших критерия М и λ между собой:

$$\mathrm{M}^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}; \tag{4.48}$$

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2}\mathrm{M}^2}{1 + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}. \tag{4.49}$$

4.3.4. Предельная, или максимальная, скорость. Под ***предельной*** [9], или ***максимальной*** [2], скоростью w_{max} понимается некоторое гипотетическое значение скорости, которое она может принять при полном преобразовании энтальпии в кинетическую энергию от i^* до $i = 0$ в энергетически изолированном процессе. Полагая в (4.3) $i = 0$, а $w = w_{max}$, получим

$$w_{max} = \sqrt{2i^*} = \sqrt{2C_pT^*} = \sqrt{2\frac{k}{k-1}RT^*}. \tag{4.50}$$

Очевидно, что значению w_{max} соответствуют значения $T = 0$, $p = 0$, $\rho = 0$.

4.3.5. Относительная скорость. Максимальная скорость также может использоваться в качестве меры оценки степени

преобразования энергии. С этой целью вводят параметр Λ, называемый относительной скоростью, так что

$$\Lambda = \frac{w}{w_{max}} . \tag{4.51}$$

Из (4.51) с учетом (4.50) нетрудно получить соотношение, связывающее температуру торможения со статической температурой, в виде

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \Lambda^2, \tag{4.52}$$

откуда

$$\Lambda^2 = \frac{T^* - T}{T^*} . \tag{4.53}$$

Следовательно, Λ тоже является величиной, характеризующей преобразование энергии. При этом Λ изменяется от $\Lambda = 0$ до $\Lambda = 1$ и связана с λ формулой

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{k-1} \Lambda^2. \tag{4.54}$$

4.4. Газодинамические функции

Газодинамические функции (ГДФ) — это безразмерные функции параметров торможения и критериев скоростного режима течения M или λ, определяющие статические параметры элементарной струйки. Использование газодинамических функций позволяет:

— проводить качественный анализ течения, не проводя численных расчетов;

— существенно упростить алгоритм получения результата;

— сократить время получения результата расчета, так как ГДФ затабулированы и могут использоваться для различных рабочих тел.

ГДФ связывают параметры в одном сечении элементарной струйки. Будучи использованы в соответствующих уравнениях

математической модели, ГДФ определяют связь между параметрами в различных сечениях струйки. Их можно разделить на:

- энергетические функции, т. е. функции, показывающие связь между различными видами энергии;
- функции импульса, связывающие потоки количества движения;
- расходные функции, связывающие потоки массы.

4.4.1. Энергетические функции. Энергетические функции отражают соотношение между различными видами энергии в сечении струйки в зависимости от M или λ. ***Функции температуры торможения***

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 = \tau(M) = T(M); \tag{4.55}$$

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = \tau(\lambda) = T(\lambda). \tag{4.56}$$

Выражения для этих функций были получены ранее в разд. 4.3.2. В правой части выражений (4.55) и (4.56) приведены обозначения этих функций, используемые в некоторых учебниках [8, 9, 2], учебных пособиях [22, 23] или специальных изданиях [24]. Эти функции связывают температуру торможения T^*, статическую температуру T с числами M или λ и показывают долю энтальпии (внутренней энергии и энергии давления), не преобразованную в кинетическую энергию. Например, из формулы (4.56) следует, что при $\lambda = 1$ и $k = 1{,}4$ $\tau(\lambda) = 0{,}833$, т. е. кинетическая энергия составляет примерно 17%. Кроме того, формулы позволяют по значению газодинамической функции и температуре торможения определить статическую температуру.

Функции давления торможения $\pi(M)$ и $\pi(\lambda)$ (или $p(M)$ и $p(\lambda)$) легко получаются из формул (4.55) и (4.56), если воспользоваться соотношениями изоэнтропы (3.44):

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{k/k-1} = \pi(M) = p(M); \tag{4.57}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{k/k-1} = \pi(\lambda) = P(\lambda). \qquad (4.58)$$

Эти соотношения позволяют по значению газодинамической функции и давлению торможения определить статическое давление. Они показывают долю потенциальной энергии давления, не преобразованной в кинетическую. При задании давления в системе p^* и граничного условия по давлению в окружающей среде $p_н$ соотношения (4.57) и (4.58) позволяют определить то максимальное значение λ, которое может быть получено при заданных граничных условиях. Если к этому добавить задание T^* для системы, то однозначно определится скорость, а следовательно, и кинетическая энергия, которые могут быть получены на выходе из системы при ее взаимодействии с окружающей средой. В самом деле, в соответствии с (4.45)

$$w = \lambda a_{кр}, \qquad (4.59)$$

$a_{кр}$ определяется в (4.41) только показателем полной энергии T^*, а λ — показателем качества энергии p^* и граничным условием $p_н = p$ в соответствии с (4.58). Получение наибольшего значения скорости рабочего тела на выходе из реактивного двигателя является одной из целей проектирования двигателя. Графики функций $\pi(\lambda)$ и $\tau(\lambda)$ показаны на рис. 4.1.

4.4.2. Функции расхода. Газодинамические функции $\varepsilon(M)$ и $\varepsilon(\lambda)$ (или $\rho(M)$ и $\rho(\lambda)$), определяющие отношение заторможенной плотности ρ^* к статической плотности ρ, получаются из энергетических температурных функций (4.57) и (4.58) и соотношения изоэнтропы (3.44):

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \varepsilon(M) = \rho(M); \qquad (4.60)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} = \varepsilon(\lambda) = \rho(\lambda). \qquad (4.61)$$

Эти функции показывают сжимаемость газа и позволяют вычислять значение статической плотности по заторможенному параметру ρ^*, а также используются при вычислении массового расхода газа. Для характеристики массового расхода используется понятие *плотности тока*: $j = \rho\, w$. Отношение плотности тока j к плотности тока в критическом сечении

$$j_{кр} = \rho_{кр}\, w_{кр} \tag{4.62}$$

представляет собой газодинамическую функцию $q\,(\lambda)$ и называется ***приведенным расходом***:

$$q\,(\lambda) = \frac{j}{j_{кр}} = \frac{\rho\, w}{\rho_{кр}\, w_{кр}}\,. \tag{4.63}$$

Заменив $\dfrac{\rho}{\rho_{кр}} = \dfrac{\rho}{\rho^*} \cdot \dfrac{\rho^*}{\rho_{кр}} = \varepsilon\,(\lambda) \cdot \dfrac{1}{\varepsilon\,(\lambda = 1)}$ в (4.63), получим

$$q\,(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\varepsilon\,(\lambda)}{\varepsilon\,(\lambda = 1)} = \lambda \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/(k-1)} \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/(k-1)}. \tag{4.64}$$

Функция $q\,(\lambda)$ изменяется от нуля до единицы, имеет максимум $q\,(\lambda) = 1$ при $\lambda = 1$ и является двузначной. Одно значение $q\,(\lambda)$ соответствует значениям $\lambda < 1$, другое соответствует $\lambda > 1$.

4.4.3. Уравнения расхода и неразрывности в газодинамической форме. Функция $q\,(\lambda)$ позволяет получить уравнение расхода в газодинамической форме. В соответствии с (3.9) уравнение расхода $G = \rho w F$. С учетом (4.63), (4.32), (4.39)

$$\rho w = \rho_{кр} w_{кр} q\,(\lambda) \quad \text{и} \quad \rho_{кр} = \rho^* \left(\frac{T_{кр}}{T^*}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{p^*}{RT^*}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \tag{4.65}$$

а $w_{кр} = a_{кр} = \sqrt{\dfrac{2k}{k+1} RT^*}$ (4.41).

Подставляя (4.65) и (4.41) в (3.9), получаем искомое *уравнение расхода в газодинамической форме*:

$$G = m\frac{p^* q(\lambda) F}{\sqrt{T^*}}. \quad (4.66)$$

Здесь

$$m = \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/(k-1)} \frac{k}{R}} \quad (4.67)$$

— постоянный для выбранного рабочего тела коэффициент, определяемый его теплофизическими характеристиками k и R. В табл. 4.1 приведены значения m для некоторых рабочих тел.

Таблица 4.1

Газ	k	R, Дж/кгК	m
Воздух	1,4	287,3	0,0404
Водород	1,4	4160	0,0106
Продукты сгорания ТРД	1,33	288,3	0,0396
Продукты сгорания ТРДФ	1,25	289	0,0388

В случае задания статического давления p вместо давления торможения p^* для вычисления расхода можно использовать газодинамическую функцию $y(\lambda)$:

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{1/k-1} \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}. \quad (4.68)$$

Тогда уравнение расхода в газодинамической форме будет иметь вид

$$G = m\frac{p\, y(\lambda) F}{\sqrt{T^*}}. \quad (4.69)$$

Графики газодинамических функций расхода $\varepsilon(\lambda)$, $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ приведены на рис. 4.1 и 4.2.

С учетом (4.66) ***уравнение неразрывности в газодинамической форме*** можно записать как

$$m_1 \frac{p_1^* \, q\,(\lambda_1)\, F_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 \frac{p_2^* \, q\,(\lambda_2)\, F_2}{\sqrt{T_2^*}} \,. \tag{4.70}$$

Для большинства задач можно полагать $m_1 = m_2$ и уравнение неразрывности записывать в виде

$$\frac{p_1^* \, q\,(\lambda_1)\, F_1}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2^* \, q\,(\lambda_2)\, F_2}{\sqrt{T_2^*}} \,. \tag{4.71}$$

Очевидно, справедлива и такая форма уравнения неразрывности (см. 4.69):

$$\frac{p_1 \, y\,(\lambda_1)\, F_1}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2 \, y\,(\lambda_2)\, F_2}{\sqrt{T_2^*}} \,. \tag{4.72}$$

4.4.4. Функции импульса. Будем называть функцию

$$\Phi = Gw + pF \tag{4.73}$$

полным импульсом. Выразим полный импульс Φ через λ. Учитывая, что $G = \rho\, w\, F$ (3.9), $\frac{k\,p}{\rho} = a^2$ (2.99), $\mathrm{M}^2 = \frac{\frac{2}{k+1}\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}$ (4.48), получим

$$\Phi = Gw\left(1 + \frac{k}{k}\,\frac{pF}{\rho\, w\, F_w}\right) = \frac{k+1}{2k}\, G\, a_{\text{кр}} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right). \tag{4.74}$$

Используя условие $\lambda = 1$, определим из (4.74) критическое значение импульса $\Phi_{\text{кр}}$:

$$\Phi_{\text{кр}} = Gq_{\text{кр}} + p_{\text{кр}}\, F_{\text{кр}} = \frac{k+1}{k}\, G\, a_{\text{кр}} \,. \tag{4.75}$$

Газодинамической функцией $z(\lambda)$ будем называть

$$z(\lambda) = \frac{2\Phi}{\Phi_{\text{кр}}} = \lambda + \frac{1}{\lambda}. \qquad (4.76)$$

$z(\lambda)$ является двузначной функцией и имеет минимум $z(\lambda) = 2$ при $\lambda = 1$. Выбор соответствующего значения λ, одно из которых меньше единицы, а другое — больше единицы, зависит от условий конкретной задачи.

Обозначим полный импульс заторможенного потока Φ^*, т. е.

$$\Phi^* = p^* F, \qquad (4.77)$$

и введем ***газодинамическую функцию*** $f(\lambda)$ как отношение полного импульса к импульсу заторможенного потока

$$f(\lambda) = \frac{\Phi}{\Phi^*}. \qquad (4.78)$$

Покажем, что величина $f(\lambda)$ может быть выражена как

$$f(\lambda) = (1 + \lambda^2)\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/k-1} = (1 + \lambda^2)\,\varepsilon(\lambda). \qquad (4.79)$$

Введем ***газодинамическую функцию*** $r(\lambda)$ как отношение статического импульса pF к полному:

$$r(\lambda) = \frac{pF}{\Phi}. \qquad (4.80)$$

Очевидно, с учетом (4.77), (4.78), (4.58) будем иметь

$$r(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2}{(1 + \lambda^2)} = \frac{\tau(\lambda)}{(1 + \lambda^2)}. \qquad (4.81)$$

Тогда ***полный импульс*** можно выразить через газодинамические функции импульса $z(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$ (рис. 4.3) следующим образом:

$$\Phi = \frac{k+1}{2k} G\, a_{\text{кр}}\, z(\lambda) = p^* f(\lambda) F = \frac{pF}{r(\lambda)}. \qquad (4.82)$$

4.4.5. Уравнение количества движения в газодинамической форме. Получим выражения уравнения количества движения в газодинамической форме, используя функции полного импульса. С этой целью перепишем уравнение количества движения (3.53) как

$$P_x = (Gw_2 + p_2F_2) - (Gw_1 + p_1F_1), \tag{4.83}$$

где P_x — проекция на ось X силы, действующей на стенки канала, со стороны жидкости, движущейся между сечениями *1* и *2* канала или

$$P_x = \Phi_2 - \Phi_1 . \tag{4.84}$$

Тогда уравнение количества движения в газодинамической форме, записанное в полных импульсах через газодинамические функции $z(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$ примет три эквивалентные формы:

$$P_x = \frac{k+1}{2k} G\left[a_{\text{кр }2}\, z(\lambda_2) - a_{\text{кр }1}\, z(\lambda_1)\right], \tag{4.85}$$

или

$$P_x = p_2^* f(\lambda_2) F_2 - p_1^* f(\lambda_1) F_1 , \tag{4.86}$$

или

$$P_x = \frac{p_2 F_2}{r(\lambda_2)} - \frac{p_1 F_1}{r(\lambda_1)} . \tag{4.87}$$

Графики газодинамических функций приведены на рис. 4.1—4.3.

4.5. Закон обращения воздействий

Как уже отмечалось, процесс в открытой системе, т. е. изменение состояния, может происходить в результате взаимодействия системы с окружающей средой. Это массовое, силовое и энергетическое взаимодействие. Оно проявляется в форме различных воздействий на систему. Различают следующие типы воздействий.

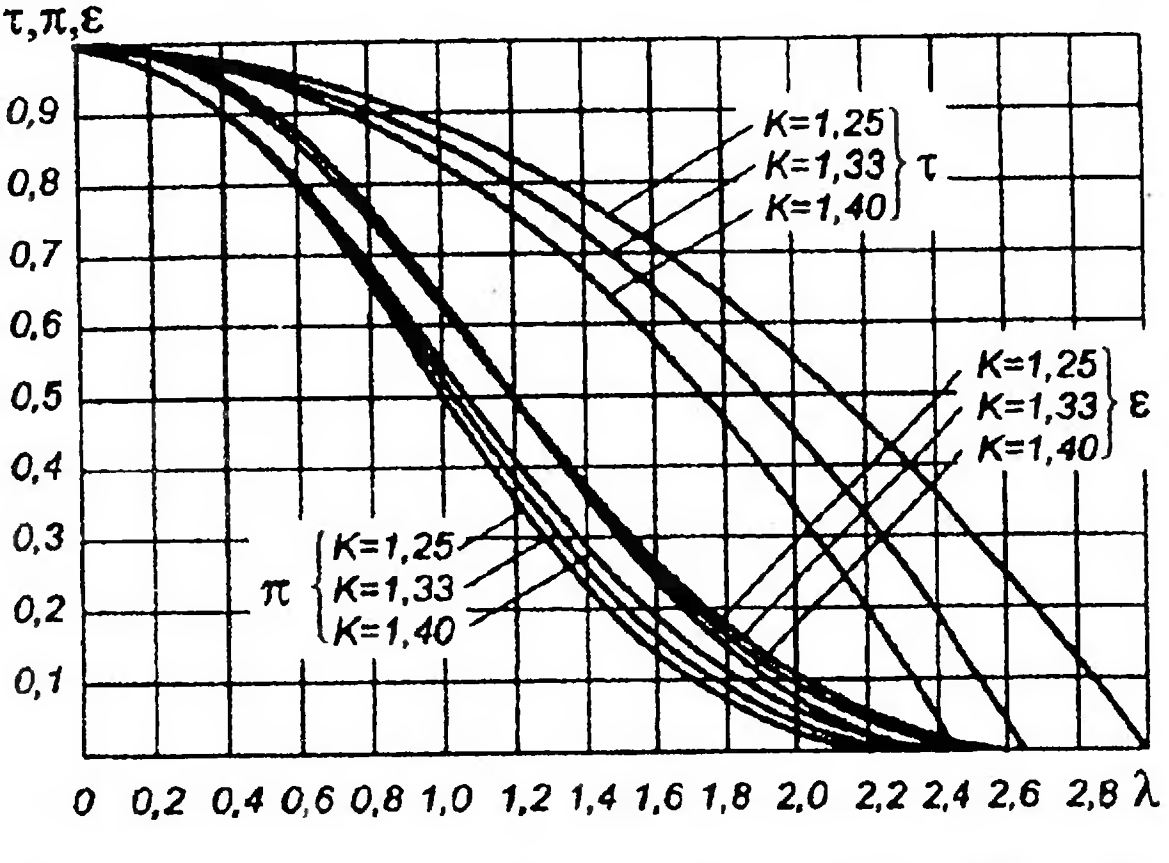


Рис. 4.1. Газодинамические функции τ (λ), ε (λ), π (λ)

Рис. 4.2. Газодинамические функции q (λ), y (λ)

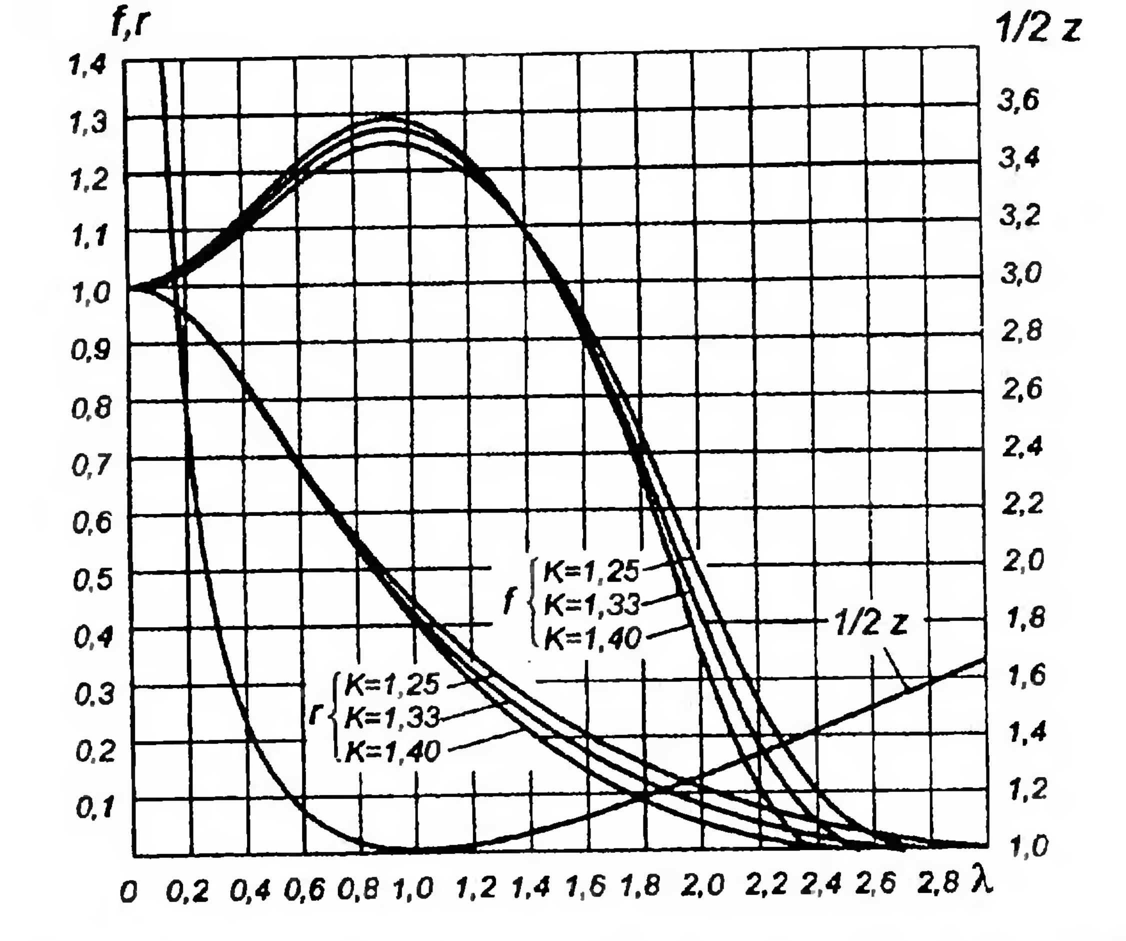


Рис. 4.3. Газодинамические функции $1/2\,z\,(\lambda)$, $f\,(\lambda)$, $r\,(\lambda)$

1. *Массовое* (или *расходное*) воздействие путем подвода или отвода массы от системы, т. е. $dG > 0$ и $dG < 0$.

2. *Силовое* (или *геометрическое*) *воздействие* путем сужения и расширения канала, т. е. $dF < 0$ и $dF > 0$ (или $pdF < 0$ и $pdF > 0$).

3. *Энергетическое*, реализуемое в форме обмена теплом или работой:

3.1) *тепловое* воздействие за счет обмена энергией в форме тепла, путем подвода или отвода тепла, т. е. $dq_н > 0$ и $dq_н < 0$;

3.2) *механическое* воздействие за счет обмена энергией в форме работы, путем подвода или отвода технической работы, т. е. $dl_{тех} < 0$ и $dl_{тех} > 0$;

3.3) воздействие *трения* за счет снижения работоспособности, или эксергии, путем совершения работы трения, т. е. $dl_{тр} > 0$.

Естественно предположить, что знак любого воздействия должен сказываться на знаке изменения параметров состояния.

Однако даже в случае одиночного воздействия, например, подвода энергии в форме тепла, последовательно анализируя уравнения модели струйки, трудно определить характер изменения (увеличение или уменьшение) того или иного параметра.

Л.А. Вулисом [26] был сформулирован и подробно исследован закон, позволяющий однозначно анализировать характер изменения параметров состояния системы при наличии различных воздействий. Этот закон получил название ***закона обращения воздействий***.

4.5.1. Уравнения закона обращения воздействий. Получим одно из основных уравнений закона для случая постоянства массового расхода системы, т. е.

$$dG = \text{const} . \tag{4.88}$$

Из уравнения расхода в дифференциальной форме (3.15) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w} - \frac{dF}{F} . \tag{4.89}$$

Дифференцируя уравнение состояния совершенного газа (2.63), определим

$$\frac{dp}{\rho} = RdT + RT\frac{d\rho}{\rho} . \tag{4.90}$$

Подставив в (4.90) $\frac{d\rho}{\rho}$ из (4.89) и заменив RT на a^2/k, получим

$$\frac{dp}{\rho} = RdT - \frac{a^2}{k}\left(\frac{dw}{w} + \frac{dF}{F}\right). \tag{4.91}$$

Запишем уравнение энергии в дифференциальной форме (3.33) применительно к течению газа

$$gdz = 0 \tag{4.92}$$

с учетом (3.35), (2.68), (2.69):

$$dq_{н} - dl_{тех} = \frac{k}{k-1} RdT + wdw. \qquad (4.93)$$

Выражая RdT из (4.93) и подставляя его в (4.91), получим

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{k-1}{k}\left(dq_{н} - dl_{тех} - wdw\right) - \frac{a^2}{k}\left(\frac{dw}{w} - \frac{dF}{F}\right). \qquad (4.94)$$

Из уравнения Бернулли (3.39) с учетом (4.92) имеем

$$-\frac{dp}{\rho} = wdw + dl_{тех} + dl_{тр}. \qquad (4.95)$$

Подставляя $\frac{dp}{\rho}$ из (4.94) в (4.95), получим уравнение закона обращения воздействий относительно скорости w:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2} dq_{н} - \frac{1}{a^2} dl_{тех} - \frac{k}{a^2} dl_{тр}. \qquad (4.96)$$

Аналогично может быть получено и уравнение с учетом расходного воздействия dG [8, 26]:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2} dq_{н} - \frac{1}{a^2} dl_{тех} - \frac{k}{a^2} dl_{тр} -$$

$$-\left[\frac{T_{м}}{T} + k\mathrm{M}^2\left(1 - \frac{w_{м}}{w}\right) + \frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\left[1 - \left(\frac{w_{возд}}{w}\right)^2\right]\right]\frac{dG}{G}, \qquad (4.97)$$

где $w_{м}$ — проекции скорости $w_{возд}$ добавляемой массы на направление скорости основного потока; $T_{м}$ — температура добавленной массы.

4.5.2. Свойства уравнений закона обращения воздействий (ЗОВ).

1. Структура уравнений ЗОВ такова, что в *левой части* уравнения содержится сомножитель $(\mathrm{M}^2 - 1)$, выражающий краевое условие скоростного режима системы. Вторым сомножителем является безразмерный дифференциал одного из параметров состояния системы. В уравнениях (4.96) и (4.97) таким параметром является скорость w. В *правую часть* уравнения аддитивно входят дифференциалы всех возможных воздействий на систему. Это позволяет при задании краевого условия скоростного

режима M однозначно определить характер изменения параметра (уменьшение или увеличение) по знаку суммарного или отдельного воздействия, либо, задавая характер изменения параметра, определить характер необходимого воздействия (положительное или отрицательное). Очевидно, задавая характер изменения параметра (с помощью знака дифференциала) и характер воздействия (с помощью знака дифференциала воздействия), можно однозначно определить значение краевого условия скоростного режима ($M < 1$ или $M > 1$).

2. Уравнение ЗОВ сохраняет свою структуру и может быть записано для любого параметра состояния p, T, ρ, в том числе и для параметра M.

3. Направление воздействия на систему (знак дифференциала воздействия) совместно с краевым условием скоростного режима M однозначно определяет направление (возрастание или убывание) параметров состояния.

Рассмотрим, как работает уравнение ЗОВ, на примере геометрического воздействия dF. Решим следующую задачу: определить направление воздействия на систему с газовым рабочим телом, обеспечивающее непрерывное увеличение скорости. (Устройство, служащее для разгона потока в гидрогазодинамике, называется *соплом*.) Для случая только геометрического воздействия уравнение ЗОВ (4.96) имеет вид

$$(M^2 - 1)\,\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}. \qquad (4.98)$$

Полученное выражение называется *уравнением Гюгонио*.

Пусть $M < 1$, тогда для получения ускорения потока, т. е. $dw > 0$, необходимо иметь $dF < 0$. Это следует из условия равенства знаков левой и правой частей дифференциального уравнения (4.98). Вместе с ростом скорости w будет также увеличиваться число M в соответствии с уравнением ЗОВ, записанным для параметра M и геометрического воздействия [26]:

$$(M^2 - 1)\,\frac{dM^2}{M^2} = 2\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{dF}{F}. \qquad (4.99)$$

Поэтому для продолжения ускорения газа (сохранения знака $dw > 0$) необходимо после достижения $M = 1$ изменить знак

воздействия на противоположный, т. е. обеспечить $dF > 0$, т. к. скобка $(\mathrm{M}^2 - 1)$ изменит знак на противоположный.

Таким образом, для непрерывного ускорения потока с помощью геометрического воздействия необходим канал, который сначала сужается до критического сечения, а затем расширяется. При этом на выходе обеспечивается сверхзвуковая скорость, т. е. $\mathrm{M} > 1$. Такой канал называется *соплом Лаваля.*

Все сказанное о поведении параметра w и воздействии dF справедливо для других параметров состояния и воздействий. При этом следует учитывать, что воздействие трения является односторонним и положительным.

Рассмотренные свойства ЗОВ и пример позволяют сделать следующие выводы, которые можно рассматривать как эквивалентные формулировки закона.

1. Любое воздействие оказывает противоположное влияние на дозвуковые и сверхзвуковые газовые потоки.

2. Переход через скорость звука с помощью одностороннего (без изменения знака) воздействия невозможен. Это явление носит название *кризиса течения* и будет подробно рассматриваться ниже.

3. Для перехода через скорость звука знак воздействия необходимо изменить в критическом сечении на противоположный.

ЗОВ отражает влияние сжимаемости газа на его движение, которое усиливается с увеличением числа М и справедливо только для сжимаемого газа.

Приведем без вывода [8, 26] еще одно важное уравнение ЗОВ, записанное для статического давления p для случая постоянного массового расхода, т. е. $dG = 0$:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{dp}{p} = -k\left\{\mathrm{M}^2\,\frac{dF}{F} - \frac{(k-1)\,\mathrm{M}^2}{a^2}\,dq_{\text{н}} - \frac{1}{a_2}\,dl_{\text{тех}} - \frac{1 + (k-1)\,\mathrm{M}^2}{a^2}\,dl_{\text{тр}}\right\}. \qquad (4.100)$$

Сравнение (4.98) и (4.10) показывает, что скорость и давление всегда во всех процессах меняются противоположным образом, т. е. увеличению скорости соответствует уменьшение статического давления и наоборот. Это является прямым следстви-

ем уравнения количества движения (второго закона Ньютона), по которому ускорению жидкости соответствует сила, возникающая за счет уменьшения статического давления.

Соотношения закона обращения воздействия позволяют получить [8, 26] весьма важное уравнение для оценки изменения давления торможения p^*, характеристики качества энергии, в зависимости от различных воздействий

$$\frac{dp^*}{p^*} = -\frac{(k-1)\,\mathrm{M}^2}{RT^*}\,dq_{\text{н}} - \frac{1}{RT^*}\,dl_{\text{тех}} - \frac{k}{a^2}\,dl_{\text{тр}} - {}$$

$$- k\mathrm{M}^2\left(1 - \frac{w_{\text{м}}}{w}\right)\frac{dG}{G}. \qquad (4.101)$$

Уравнение (4.101) показывает, что давление торможения p^* всегда уменьшается при подводе тепла $dq_{\text{н}}$, отводе технической работы $dl_{\text{тех}}$, совершении работы трения $dl_{\text{тр}}$ и процессах смешения при подводе массы dG со скоростью, меньше скорости основного потока.

Следует отметить, что геометрическое, или силовое, воздействие без совершения работы не оказывает влияния на давление торможения.

4.5.3. Физика закона обращения воздействий. Почему изменение скоростного режима течения газа с дозвукового на сверхзвуковой или обратно требует изменения знака воздействия? В чем физическая сущность закона обращения воздействий? Ответ на эти вопросы содержится в работе автора этого закона [26] и заключается в следующем. Изменение состояния системы (ускорение или торможение газа) определяется изменением количества движения, которое возможно только при действии силы. Определяющей силой в газовой динамике является сила давления. Любое силовое воздействие на поток вызывает в нем волну возмущения и, в частности, волну возмущения давления, которая распространяется во все стороны со скоростью звука (см. 2.12). Например, тело, помещенное в жидкость,вызовет торможение центральной струйки перед собой. При торможении давление в ней повысится и создаст импульс возмущения,который распространится вверх по потоку, “предупредит” его о наличии препятствия и вынудит перестроиться так, что

он станет обтекать помещенное в него тело, т. е. вызовет искривление линий тока перед телом. Центробежная сила на искривленных линиях тока уравновесит повышение давления перед телом и обеспечит стационарное обтекание. Так механизм обратной связи будет работать в дозвуковом потоке, поскольку скорость потока меньше скорости звука и возмущение давления сможет распространиться вверх по потоку и вызвать повышение давления.

В сверхзвуковом потоке возмущение давления от препятствия или воздействия не сможет распространиться вверх по потоку, т. к. будет сноситься вниз сверхзвуковым потоком. При этом поток не получит информации о наличии препятствия, как "слепой" наткнется на него и будет вынужден перестраиваться и тормозиться мгновенно, скачком уменьшая скорость и увеличивая давление. Увеличение давления будет происходить ниже источника возмущения и необходимо для увеличения плотности потока, которому необходимо "протиснуться" в оставшееся сечение, частично занятое телом, с "меньшей скоростью".

Таким образом, в дозвуковом потоке источник возмущения будет оказывать влияние на участке выше по потоку, а в сверхзвуковом — ниже по потоку. Иными словами, дозвуковой поток заранее перестроится так, чтобы иметь за источником возмущения давление, равное противодавлению среды. Сверхзвуковой поток сохраняет распределение давления до источника возмущения, не связанное с последним, а влияние источника распространяется только на область ниже его, где оно сохранится независимо от противодавления среды.

Целесообразно все источники возмущения (или воздействия) разделить на два вида: вызывающие местное повышение давления (их будем называть *прямыми воздействиями*) и вызывающие местное понижение давления (*обратные воздействия*). Таким образом, прямое воздействие, вызывая перед возмущением повышение давления в дозвуковом потоке, будет создавать силу, направленную по потоку, и вызывать ускорение потока, например, отрицательное геометрическое воздействие. Обратное воздействие, вызывая снижение давления в дозвуковом потоке перед возмущением, создает положительный градиент давления и силу, направленную против потока.

В сверхзвуковом потоке будет обратная картина. Тот же источник возмущения, внесенный в сверхзвуковой поток, создает повышение давления за собой, т. е. силу, направленную против потока, и вызывает торможение сверхзвукового потока. Обратное воздействие вызовет снижение давления за возмущением, создаст отрицательный градиент давления и вызовет ускорение потока.

4.6. Модель элементарной струйки в газодинамической форме

4.6.1. Система уравнений модели. Примем все допущения элементарной струйки и условие (3.46). Кроме того, будем полагать, что теплофизические свойства рабочего тела в процессах изменения состояния системы не изменяются, т. е.

$$R = \text{const}, \quad C_p = \text{const}, \quad k = \text{const}. \qquad (4.102)$$

Параметры торможения и газодинамические функции позволяют записать уравнения модели для двух состояний системы *1* и *2* в следующем виде.

1. Уравнение неразрывности (4.71)

$$\frac{p_1^* \, q\,(\lambda_1)\, F_1}{\sqrt{T_1^*}} = \frac{p_2^* \, q\,(\lambda_2)\, F_2}{\sqrt{T_2^*}}\,.$$

2. Уравнение количества движения в трех эквивалентных формах (4.85)—(4.87):

$$P_x = \frac{k+1}{2k}\, G \left[a_{\text{кр}\,2}\, z\,(\lambda_2) - a_{\text{кр}\,1}\, z\,(\lambda_1) \right],$$

$$P_x = p_2^* \, f\,(\lambda_2)\, F_2 - p_1^* \, f\,(\lambda_1)\, F_1\,, \qquad P_x = \frac{p_2\, F_2}{r\,(\lambda_2)} - \frac{p_1\, F_1}{r\,(\lambda_1)}\,.$$

3. Уравнения энергии (соответственно (4.9), (4.56), (4.58)):

$$q_{\text{п}} - l_{\text{тех}} = C_p\,(T_2^* - T_1^*);$$

$$\frac{T_1}{T_1^*} = \tau\,(\lambda_1), \quad \frac{T_2}{T_2^*} = \tau\,(\lambda_2)\,;$$

$$\frac{p_1}{p_1^*} = \pi(\lambda_1), \quad \frac{p_2}{p_2^*} = \pi(\lambda_2).$$

Уравнение (4.9) связывает энергию в различных сечениях струйки, а (4.56) и (4.58) — различные виды энергии в сечении.

4. Определяющие уравнения ((4.32) и (4.61)):

$$p_1^* = \rho_1^* RT_1^*, \quad p_2^* = \rho_2^* RT_2^*;$$
$$\frac{\rho_1}{\rho_1^*} = \varepsilon(\lambda_1), \quad \frac{\rho_2}{\rho_1^*} = \varepsilon(\lambda_2). \tag{4.103}$$

5. Уравнение качества процесса (4.27)

$$\nabla l_{1-2}^{max} = T_0 \left(C_p \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*} \right) = -T_0 R \ln \frac{p_2^*}{p_{2s}^*}, \tag{4.104}$$

причем для энергетически изолированной системы,

если $\nabla l_{1-2}^{max} = 0$ (4.104) — то процесс обратимый;

если $\nabla l_{1-2}^{max} > 0$ (4.104) — процесс необратимый.

6. Уравнение массового расхода (4.66)

$$G = m \frac{p_1^* q(\lambda_1) F_1}{\sqrt{T_1^*}}, \quad G = m \frac{p_2^* q(\lambda_2) F_2}{\sqrt{T_2^*}}.$$

7. Уравнение для расчета необратимого изменения давления торможения p^*

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = p^*(\lambda, \Pi_i) \tag{4.105}$$

или

$$\frac{dp^*}{p^*} = -\frac{(k-1)\,M^2}{RT^*} dq_н - \frac{1}{RT^*} dl_{тех} - \frac{k}{a^2} dl_{тр} \qquad (4.101),$$

Π_i — параметры, характерные для каждого конкретного процесса.

8. Уравнение закона обращения воздействия для случая постоянства массового расхода G (4.96)

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2}dq_н - \frac{1}{a^2}dl_{тех} - \frac{k}{a^2}dl_{тр}.$$

9. Условия однозначности, или краевые условия. К ним относятся:

— геометрические свойства системы, например, размеры и форма канала и т. д.;

— коэффициенты, характеризующие физические свойства рабочего тела системы, например, k, C_p, R, m и т. д.;

— граничные условия, характеризующие условия на границах системы. Для газодинамических задач в рассматриваемой постановке одним из важнейших является условие по статическому давлению $p_с = p_н$ при $M < 1$ (2.101), где $p_с$ — давление на границах системы; $p_н$ — давление в окружающей среде;

— временные или начальные условия, т. е. значение параметров в начальный момент времени. Так как здесь рассматривается стационарная система и стационарные процессы, начальные условия справедливы для любого момента времени, т. е. распределение параметров от времени не зависит.

Сформулированная газодинамическая модель элементарной струйки успешно используется для расчета целого класса газодинамических процессов в элементах и устройствах реактивных двигателей. Правда, определенную проблему представляет расчет потерь работоспособности, или эксергии, в необратимых процессах, определяющихся потерями давления торможения в системе. Однако, прежде чем будут рассмотрены способы и методы расчета потерь полного давления, продемонстрируем работоспособность газодинамической модели путем сравнения ее с моделью, основанной на использовании статических параметров (см. § 3.5).

4.6.2. Простейшая модель элементарной струйки в газодинамической форме. Запишем уравнения модели элементарной струйки в газодинамической форме с учетом условий(3.41), (3.46) и (3.47), использовавшихся при формулировании модели с участием статических параметров. Эти условия соответствуют энергоизолированной системе ($q_н = l_{тех} = 0$), совершающей изоэнтропный процесс ($dS = 0$ (3.41)). Тогда из уравнения энергии (4.9) с учетом (3.46) имеем

$$T_2^* = T_1^*, \tag{4.106}$$

из условия (3.41) следует, что

$$dl_{\text{тр}} = 0, \tag{4.107}$$

а из закона обращения воздействия (4.100) с учетом (3.46) и (4.107) получаем

$$dp^* = 0, \text{ т.е. } p_1^* = p_2^* . \tag{4.108}$$

Тогда уравнение неразрывности (4.71) с учетом (4.106) и (4.108) запишется как

$$q(\lambda_1) F_1 = q(\lambda_2) F_2 , \tag{4.109}$$

а уравнения количества движения (4.85) и (4.86) будут иметь вид

$$P_x = \frac{k+1}{2k} G a_{\text{кр}} \left[z(\lambda_2) - z(\lambda_1) \right]; \tag{4.110}$$

$$P_x = p_1^* \left[f(\lambda_2) F_2 - f(\lambda_1) F_1 \right]. \tag{4.111}$$

Уравнение качества процесса (4.27)

$$\nabla_{1-2}^{\max} = 0. \tag{4.112}$$

Уравнения энергии для параметров в сечении струйки (4.56), (4.58), уравнения состояния (4.32) и (4.36), расхода (4.66) не изменяются. Уравнение (4.105) $\sigma = 1$ и уравнение ЗОВ (4.96) записываются как (4.98)

$$(\mathrm{M}^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} .$$

Применим уравнения полученной модели для анализа и решения ранее решавшейся задачи 3.1 в § 3.5.

Сохраняя ранее проведенный анализ, построим алгоритм решения задачи. Искомую силу определим из (4.111) с учетом знака

$$P_x = -p_1^* \left[f(\lambda_2) F_2 - f(\lambda_1) F_1 \right]. \tag{4.113}$$

Значения давления торможения p_1^* определим по уравнению (4.58) и газодинамической функции $\pi(\lambda_1)$ и значению p_1 :

$$p_1^* = \frac{p_1}{\pi(\lambda_1)}. \tag{4.114}$$

Значение функции $\pi(\lambda_1)$ находим в таблицах газодинамических функций (ТГДФ) (см. приложение 1) по значению λ_1 и показателю изоэнтропы k.

Значение функции $f(\lambda_2)$ находим в ТГДФ по значению λ_2 и показателю изоэнтропы k. Так как функция $q(\lambda_2)$ двузначная, то решаем, какое из значений λ_2 выбирать: $\lambda'_2 < 1$ или $\lambda''_2 > 1$. Поскольку $dF > 0$ (площадь диффузора увеличивается), из уравнения (4.98) заключаем, что $dw < 0$. То есть скорость потока уменьшается, следовательно, λ_2 будет меньше 1 и необходимо в ТГДФ выбрать значение $\lambda'_2 < 1$.

Значение функции $q(\lambda_2)$ определим по уравнению неразрывности (4.109):

$$q(\lambda_2) = \frac{q(\lambda_1) F_1}{F_2}. \tag{4.115}$$

Значение функции $q(\lambda_1)$ найдем в ТГДФ по значению λ_1 и показателю изоэнтропы k.

Значение λ_1 находим в ТГДФ по значению M_1 и показателю изоэнтропы k.

Значение M_1 определим по формуле

$$\mathrm{M}_1 = \frac{w_1}{a_1} = \frac{w_1}{\sqrt{kRT_1}}. \tag{4.116}$$

Реализуя алгоритм в обратном порядке, начиная с (4.116) получаем решение.

Для проверки по граничному условию определяется p_2 из (4.58) с учетом (4.108):

$$p_2 = p_1^* \pi(\lambda_2), \tag{4.117}$$

где $\pi(\lambda_2)$ находится из ТГДФ по значению λ_2, определенному ранее, и k.

Проведенное решение показывает, что ранее отмеченные недостатки решения полностью устранены (см. § 3.5), расчеты с использованием ТГДФ проводятся быстрее, а сам алгоритм проще.

Отметим некоторые особенности рассматриваемой модели, используемой для частного случая. Все статические параметры p, T, ρ в сечении струйки определяются параметрами торможения и λ (или M) через газодинамические функции. Так как параметры торможения p^*, T^*, ρ^* не изменяются и одинаковы для различных сечений струйки, то статические параметры и характер их изменения (увеличение или уменьшение) однозначно определяется изменением λ. При $T^* = \text{const}$ изменение λ однозначно определяется изменением скорости w, т. к. $w = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}$. В свою очередь, изменение w определяется из (4.98) только скоростным режимом течения ($M < 1$ или $M > 1$) и изменением геометрии. Поэтому модель позволяет, не решая задачу, на основе анализа по предложенному алгоритму предсказать характер (уменьшение или увеличение) параметров. Алгоритм выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{matrix} M \\ F \end{matrix}\right\} \quad (4.98) \;\Rightarrow \text{sign} \cdot dw \Rightarrow \text{sign} \cdot d\lambda \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (4.58)\; p \\ (4.56)\; T. \\ (4.61)\; \rho \end{matrix}\right.$$

4.6.3. О необходимом и достаточном условиях изменения состояния системы струйки. Всегда ли будет происходить изменение параметров состояния системы струйки в соответствии с "предсказаниями" закона обращения воздействий, например (4.96) или частного случая (4.98)? Всегда ли дозвуковой поток будет разгоняться в сужающемся канале?

Рассмотрим данный пример. Пусть поток $M < 1$ на входе в сужающийся канал, т.е. с $dF < 0$, имеет давление p, равное $p_н$ — давлению окружающей среды. Очевидно, что при этих условиях поток как следует из (4.98) ускоряться не может, т. к. в случае ускорения давление p в соответствии с (4.100) должно будет уменьшаться. Тогда граничное условие по давлению (2.101) не будет выполнено и стационарное течение с ускорением не реализуется.

Поэтому уравнение закона обращения воздействий выражает *необходимое условие изменения* состояния системы: для изменения состояния системы на нее должно быть оказано одно или несколько из возможных воздействий: массовое dG, силовое, или геометрическое dF, или энергетическое ($dq_н$, $dl_{тех}$, $dl_{тр}$).

Достаточным условием реализации изменения состояния является наличие силы. Сила приводит к изменению количества движения и, при постоянном массовом расходе, к изменению скорости, т. е. изменению состояния. Основной силой в газовой динамике является перепад давления, действующий на систему.

Рассмотрим разбиравшийся выше пример с геометрическим воздействием на дозвуковой поток. Например, если целью задачи является получение определенной скорости потока, то проверка достаточного условия проводится следующим образом. Ограничимся для простоты случаем дозвукового течения, другие случаи будут подробно рассмотрены ниже в разделе, посвященном расчету сопла.

В рассматриваемой постановке проверка достаточного условия сводится к определению располагаемого полного давления на входе в систему p_0^*. Индексом "с" обозначим параметры на выходе из системы, индексом "н" — параметры окружающей среды на выходе из системы. Так как течение дозвуковое, то граничное условие (2.101) $p_с = p_н$. В выходном сечении должно выполняться условие $\pi(\lambda) = \dfrac{p_с}{p_с^*} = \dfrac{p_н}{p_с^*}$, определяемое газодинамической функцией $\pi(\lambda)$. Если течение в канале изоэнтропийное, то $p_0^* = p_с^*$ и $p_0^* = p_с^* = \dfrac{p_н}{\pi(\lambda_с)}$.

Если давление на входе в систему равно p_0^*, то получение заданного значения λ с помощью отрицательного геометрического воздействия (при дозвуковом режиме в системе), как и "предсказывает" уравнение (4.98), будет реализовано.

4.7. Явление кризиса в газовом потоке

С выполнением необходимого условия связано явление кризиса в газовом потоке. Если при достижении потоком критической скорости $w_{кр}$, т. е. режима $\mathrm{M} = 1$, не изменить знак воздействия, как предсказывают уравнения закона обращения воздействий, возникает явление, называемое ***кризисом течения.***

Кризис течения — это невозможность реализации стационарного течения без изменения характера воздействия на систему. Речь идет о необходимости изменения знака воздействия, которое ранее производилось на систему, либо замена этого воздействия на другое воздействие (или другие воздействия), обеспечивающее продолжение характера изменения параметра (увеличение или уменьшение). Рассмотрим явление кризиса на примере геометрического воздействия в изоэнтропийном процессе, рассмотренном выше. На входе в систему $\mathrm{M} < 1$ на поток оказывается отрицательное геометрическое воздействие $dF < 0$, так что в сечении канала (рис. 4.4) F_1 число М достигает критического значения $\mathrm{M} = 1$ согласно (4.98). Очевидно, что в соответствии с уравнением неразрывности (4.109) $F_0\, q\,(\lambda_0) = F_1\, q\,(\lambda_1) = F_1$, т. к. при $\lambda_1 = 1$, $q\,(\lambda_1) = 1$.

Рис. 4.4. К явлению кризиса в газовом потоке

При продолжении отрицательного геометрического воздействия от F_1 до F_c скорость w и число M (см. (4.99)) не могут увеличиться, поэтому критическое сечение переместится из F_1 в F_c. Уравнение неразрывности в этом случае будет $F_0\, q\,(\lambda_0) = F_c\, q\,(\lambda_c) = F_c$. Но так как $F_c < F_1$, то величина $q\,(\lambda_0)$

и, следовательно, λ_0 должна уменьшиться, что при прочих равных условиях (сохранении p_0^* и T_0^*) приведет к уменьшению расхода рабочего тела. Таким образом, стационарное течение (с постоянным расходом) без изменения знака воздействия на противоположный оказывается невозможным из-за кризиса течения.

Сказанное о явлении кризиса на примере геометрического воздействия справедливо и в отношении других воздействий. В частности, известно явление теплового кризиса, определяющее прогрев рабочего тела и ограничивающее подвод тепла. Это явление было обнаружено проф. Г.Н. Абрамовичем [9]. Подробно явления теплового кризиса, а также кризиса гидравлического сопротивления, связанного с работой трения, будут рассмотрены ниже (см. 7.4).

4.8. Газодинамическая формулировка второго начала термодинамики. Принцип уменьшения давления торможения

Преобразуем уравнение (4.28) следующим образом:

$$\nabla l_{1-2}^{\max} = -T_0 R \ln \frac{p_2^*}{p_{2s}^*}.$$

Из уравнения энергии (4.9) выразим отношение температур:

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{q_{\text{н}} - l_{\text{тех}}}{C_p T_1^*} + 1 \qquad (4.118)$$

и поставим его в выражение (4.29). В результате получим

$$p_{2s}^* = p_1^* \left(\frac{q_{\text{н}} - l_{\text{тех}}}{C_p T_1^*} + 1 \right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (4.119)$$

Подставляя (4.119) в (4.31), имеем

$$\sigma_s = \frac{p_2^*}{p_{2s}} = \frac{p_2^*}{p_1^* \left(\frac{q_{\text{н}} - l_{\text{тех}}}{C_p T_1^*} \right)^{\frac{k}{k-1}}}. \qquad (4.120)$$

Обозначим изменение давления торможения в процессе изменения состояния для общего случая как

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}. \qquad (4.121)$$

Тогда из (4.120), подставляя в него (4.121), получим

$$\sigma = \sigma_s \left(\frac{q_{\text{н}} - l_{\text{тех}}}{C_p T_1^*} + 1 \right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (4.122)$$

Параметр σ_s (4.31) и уравнение (4.28) позволяют дать газодинамическую формулировку второго закона термодинамики, точнее одной из формулировок его, называемой иногда *принципом возрастания энтропии* [3], которая звучит так: *энтропия изолированной системы возрастает или в пределе остается постоянной*. Очевидно, она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной при обратимых процессах.

Газодинамическая формулировка, которую будем называть *принципом уменьшения давления торможения*, гласит:

в изолированной газодинамической системе давление торможения остается постоянным (в обратимых процессах) либо уменьшается (в необратимых процессах). Математически это условие запишется так:

$$\sigma_s \le 1. \qquad (4.123)$$

В формуле (4.122) для расчета изменения давления торможения величина σ_s будет выражать потери от необратимости, а второй сомножитель — изменение давления, связанное с обменом энергией в форме тепла или работы.

Принцип уменьшения давления торможения более нагляден и удобен для использования, чем принцип возрастания энтропии, благодаря тому, что давление торможения в отличие от

энтропии может быть легко измерено, а величина необратимости может быть выражена числом.

5. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА. ТОРМОЖЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

5.1. Теория ударных волн или скачков уплотнения

Сверхзвуковыми течениями называется область течения газа, соответствующая значениям $M > 1$ и $w > a$. Количественные изменения, связанные с ростом скорости, приводят к существенным качественным различиям в поведении газа при сверхзвуковых режимах течения. Во-первых, это противоположный по сравнению с дозвуковыми режимами характер влияния внешних воздействий, подробно рассмотренный на основе закона обращения воздействий. В частности, для перехода от дозвукового режима к сверхзвуковому и обратно необходимо изменить знак воздействия. Во-вторых, это возможность существования ударных волн или скачков уплотнения, представляющих области разрыва. Причина этого в том, что скорость передачи информации об импульсе давления оказывается меньше скорости потока (см. § 4.5.3).

5.1.1. Поверхности разрыва. ***Поверхностями разрыва*** непрерывности, или просто ***поверхностями разрыва***, называют поверхности, на которых терпят разрыв либо функции, либо их производные.

Поверхности, на которых разрыв терпят производные, называют ***поверхностями слабого разрыва***, или ***слабыми разрывами***; если разрыв терпят функции — такие поверхности называют ***поверхностями сильного разрыва***, или ***сильными разрывами***.

Различают газодинамические, или нормальные, разрывы и тангенциальные, или касательные, и контактные разрывы.

Газодинамический разрыв есть поверхность в поле течения газа, при переходе через которую свойства вещества изменяются скачкообразно и через которую происходит течение вещества. Примером газодинамического разрыва является ударная волна или скачок уплотнения.

Тангенциальный разрыв есть поверхность в поле течения газа, при переходе через которую некоторые свойства течения изменяются скачком, но отсутствует перетекание газа через эту поверхность. Примером тангенциального разрыва может служить граница раздела между струей газа, вытекающего из сопла, и окружающей средой.

Контактный разрыв является частным случаем тангенциального разрыва. Это поверхность в поле течения газа, при переходе через которую разрыв испытывает плотность, а скорость непрерывна. Пример контактного разрыва — фронт пламени, развивающийся за стабилизатором. Плотность изменяется во фронте за счет тепловыделения.

5.2. Скачки уплотнения и ударные волны

Скачок уплотнения и ударная волна — названия одного и того же явления — ***скачкообразного торможения сверхзвукового потока, сопровождающегося диссипацией энергии.***

Ударной волной будем называть поверхность разрыва, перемещающуюся со сверхзвуковой скоростью, а ***скачком уплотнения*** — поверхность разрыва, неподвижную относительно препятствия, вызвавшего торможение сверхзвукового потока. Таким препятствием может быть твердое тело либо структура потока (например, слияние двух потоков).

Необходимость рассмотрения ударных волн или скачков уплотнения вызвана тем, что торможение сверхзвукового потока, как правило, осуществляется скачкообразно. Как было отмечено выше, это связано с отсутствием информации у потока о препятствии вследствие того, что информация в виде импульса давления распространяется со скоростью звука. Поэтому вверх по течению потока она не передается, так как сносится сверхзвуковым потоком, и поток вынужден перестраиваться (тормозиться) скачком непосредственно перед препятствием. Случай безударного торможения сверхзвукового потока может быть реализован только с помощью специальных мер и нетипичен для сверхзвуковых течений.

5.3. Физика процесса в скачке

Процесс торможения потока в скачке осуществляется скачкообразно, так что скорость потока уменьшается скачком, дав-

ление, плотность, температура увеличиваются также скачком на конечную величину.

Все изменения параметров потока протекают в очень узкой зоне — порядка длины свободного пробега молекул, и тем тоньше, чем больше число М. Так, при М = 2 толщина фронта скачка $\delta \cong 18 \cdot 10^{-5}$ мм.

Малая толщина фронта скачка и конечная величина изменения параметров потока создают значительные градиенты изменения параметров, в частности, скорости. А это вызывает значительные скорости линейной деформации и, следовательно, значительные вязкие напряжения. В соответствии с (2.53) для одномерного случая выражение для вязкого нормального напряжения запишется как

$$\sigma' \cong \mu \frac{w_{\text{н}} - w_1}{\delta}, \tag{5.1}$$

где $w_{\text{н}}$ — скорость потока перед скачком; w_1 — скорость потока после скачка. Таким образом, процесс во фронте скачка является необратимым и сопровождается диссипацией энергии, т. е. потерями эксергии или работоспособности. Параметром, характеризующим потери работоспособности, является давление торможения p^*, поэтому давление торможения в скачке будет уменьшаться. Уменьшение давления торможения носит название *волновых потерь* и определяется коэффициентом $\sigma = \dfrac{p_1^*}{p_{\text{н}}^*}$.

5.4. Модель расчета и анализ параметров в прямом скачке уплотнения

Рассмотрим так называемый ***прямой скачок*** уплотнения. ***Прямым*** называется скачок, фронт которого перпендикулярен вектору скорости. Прямые скачки возникают в тех случаях, когда при торможении нет необходимости в изменении направления вектора скорости — например, на входе в канал, ось которого совпадает с направлением скорости (рис. 5.1).

Возможные разрывы непрерывности физических величин, при которых процесс не противоречит основным законам

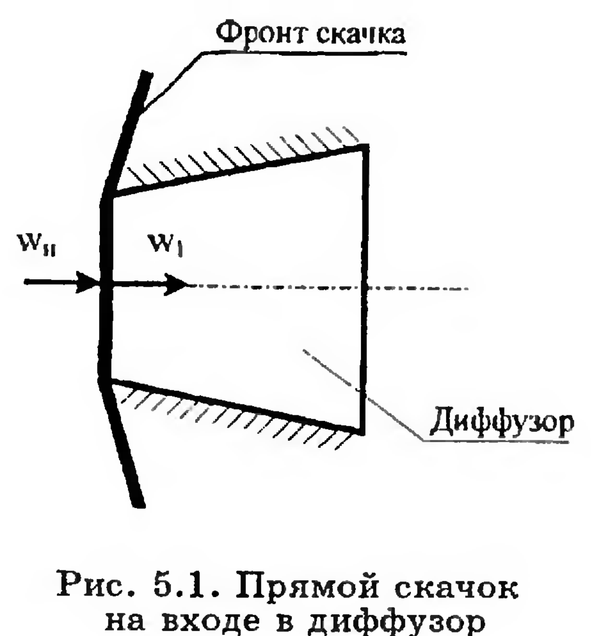


Рис. 5.1. Прямой скачок на входе в диффузор

массы, количества движения и энергии, устанавливаются условиями совместности [8]. Для определения этих условий законы сохранения применяются к системе, включающей поверхность разрыва в интегральной форме. Для неподвижной поверхности разрыва, т. е. скачка уплотнения, расчетные формулы могут быть получены на основе газодинамической модели.

5.4.1. Модель расчета. Воспользуемся газодинамической моделью, рассмотренной в разд. 4.6, со следующими допущениями.

1. Процесс в скачке энергетически изолирован, т. е.

$$dq_н = dl_{тех} = 0. \qquad (5.2)$$

2. Рабочее тело представляет собой совершенный газ; коэффициенты, характеризующие физические свойства рабочего тела, C_p, k, R и др., не изменяются в процессе, т. е. одинаковы до и после скачка.

3. Процесс в скачке является необратимым.

4.Толщина фронта скачка представляет собой поверхность разрыва с толщиной $\delta \to 0$.

Выберем газодинамическую систему (рис. 5.2) в форме цилиндра, ось которого совпадает с направлением вектора скорости. Цилиндр включает в себя фронт скачка δ и ограничен начальным сечением H и конечным 1, так что параметры в этих сечениях можно считать равномерными (фронт скачка не оказывает влияния на параметры в этих сечениях). Так как сечения $\delta = 0$ и сечения H и 1 могут быть сколь угодно близки к фронту скачка, то можно полагать, что

$$F_н = F_1 = F, \qquad (5.3)$$

т.е. струйка цилиндрическая.

Из условия (5.2) и уравнения энергии следует, что

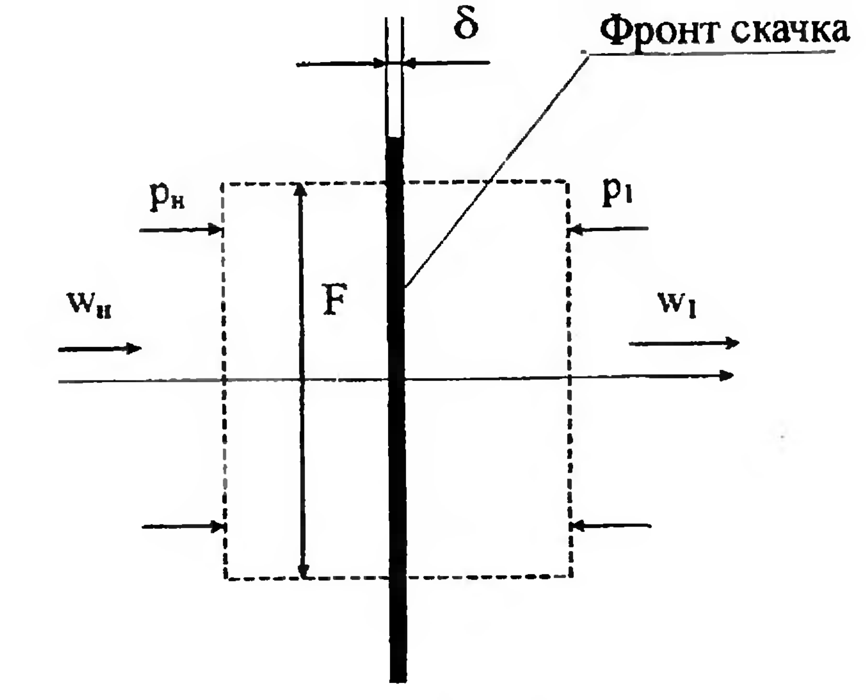


Рис. 5.2. Система для расчета прямого скачка

$$T^*_{н} = T^*_1 .\qquad(5.4)$$

Уравнение неразрывности (4.71) с учетом (5.3) и (5.4) имеет вид

$$p^*_{н}\, q\,(\lambda_{н}) = p^*_1\, q\,(\lambda_1).\qquad(5.5)$$

Из условия равновесия системы

$$P_x = 0\qquad(5.6)$$

и уравнения количества движения (4.71), (4.86) и (4.87) с учетом (5.3) и (5.4)

$$z\,(\lambda_1) = z\,(\lambda_{н}),\ p^*_1\, f\,(\lambda_1) = p^*_{н}\, f\,(\lambda_{н});\qquad(5.7)$$

$$\frac{p_1}{z\,(\lambda_1)} = \frac{p_{н}}{z\,(\lambda_{н})} .\qquad(5.8)$$

Уравнения для расчета параметров в сечении (4.56) и (4.58) имеют вид:

$$\frac{T_{н}}{T^*_{н}} = \tau\,(\lambda_{н})\ ;\quad \frac{T_1}{T^*_1} = \tau\,(\lambda_1);\quad \frac{p_{н}}{p^*_{н}} = \pi\,(\lambda_{н});\quad \frac{p_1}{p^*_1} = \pi\,(\lambda_1).$$

Определяющие уравнения (4.32), (4.61)

$$\frac{p_н^*}{\rho_н^*} = \frac{p_1^*}{\rho_1^*}; \quad \frac{\rho_1}{\rho_1^*} = \varepsilon(\lambda_1); \quad \frac{\rho_н}{\rho_н^*} = \varepsilon(\lambda_н).$$

Условия закона обращения воздействий (4.96) и (4.100) имеют вид

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{k}{a^2}\,dl_{тр}; \tag{5.9}$$

$$\frac{dp^*}{p^*} = -\frac{k}{a^2}\,dl_{тр}. \tag{5.10}$$

Уравнение качества процесса (4.27) с учетом (4.100)

$$\nabla l_{1-2}^{max} = -T_0 R \ln\frac{p_2^*}{p_1^*} > 0. \tag{5.11}$$

5.4.2. Анализ течения. Основное кинематическое соотношение для прямого скачка. Модель расчета скачка является моделью расчета энергетически изолированного необратимого процесса в цилиндрическом канале. Уравнения модели позволяют провести качественный анализ изменения параметров, не проводя их решения. Итак, скорость потока w в скачке уменьшается, по определению, так, что $w_1 < w_н$ (рис. 5.3).

В соответствии с уравнением количества движения (5.8) (или законом обращения воздействия (4.101) статическое давление p растет, и $p_1 > p_н$. Для энергоизолированного течения температура торможения не изменяется, т. к. $T_1^* = T_н^*$ и поэтому при уменьшении скорости статическая температура увеличивается в соответствии с (4.56). Из-за необратимости процесса давление торможения уменьшается, и $p_1^* < p_н^*$ (уравнение (4.100)). Изменение плотности торможения ρ^* пропорционально p^*, так что $\rho_1^* < \rho_н^*$, а статическая плотность растет в соответствии с уравнением неразрывности в виде

$$\rho_н w_н = \rho_1 w_1 . \tag{5.12}$$

Потери эксергии $\nabla l_{полез}^{max} > 0$ в соответствии с (5.11).

Для получения алгоритма расчета процессов в скачке воспользуемся выражением (5.6), которое с учетом (4.76) запишется как

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1} = \lambda_н + \frac{1}{\lambda_н}. \tag{5.13}$$

Полученное квадратное уравнение (5.13) имеет два решения, одно тривиальное $\lambda_1 = \lambda_н$, и второе

$$\lambda_1 \cdot \lambda_н = 1. \tag{5.14}$$

Выражение (5.14) носит название *основного кинематического соотношения* для прямого скачка. Если (5.14) умножить на $a_{кр}^2$, то с учетом (5.4) его можно записать формулой

$$w_1 \cdot w_н = a_{кр}^2 , \tag{5.15}$$

которая называется ***соотношением Прандтля***.

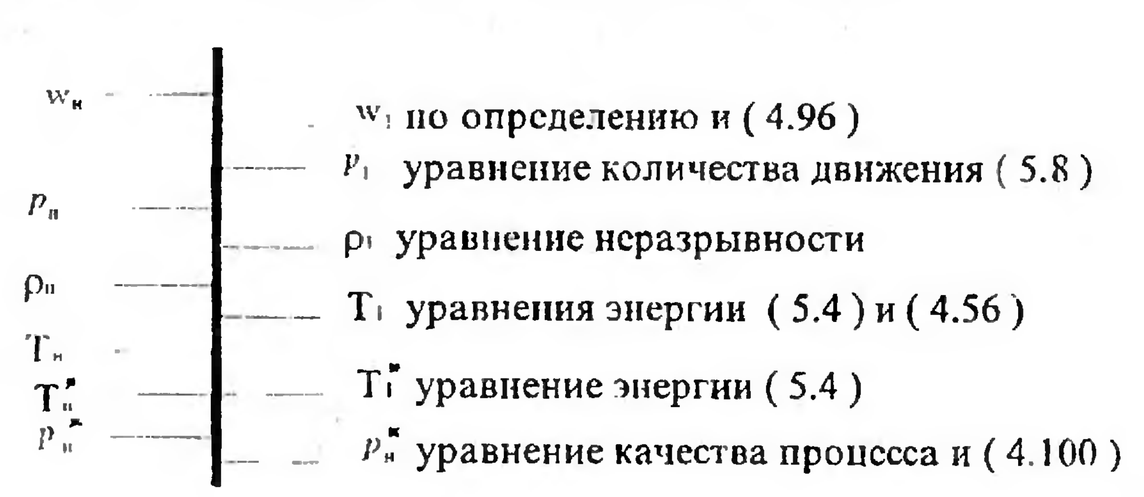


Рис. 5.3. Анализ изменения параметров в прямом скачке

Основное кинематическое соотношение показывает, что:

1) скорость за прямым скачком *всегда дозвуковая*;

2) изменение всех параметров в прямом скачке уплотнения определяется для конкретного рабочего тела только величиной $\lambda_н$.

Основное кинематическое соотношение (5.14) позволяет использовать в качестве алгоритма расчета параметров все уравнения газодинамической модели скачка. На основании (5.14) по значению $\lambda_н$ определяется λ_1. Все остальные параметры рассчитываются с помощью газодинамических функций на основе уравнений модели. В частности, волновые потери определяются по уравнению неразрывности (5.5)

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_н^*} = \frac{q\,(\lambda_н)}{q\,(\lambda_1)}\,. \qquad (5.16)$$

Получим ряд полезных формул, часто используемых для расчета параметров в скачке уплотнения. Из уравнения (5.12) с учетом $\lambda_н = \dfrac{w_н}{a_{кр}}$ и (5.15) получим

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \lambda_н^2. \qquad (5.17)$$

Используя уравнение неразрывности в виде (4.72), получим соотношение

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{y\,(\lambda_н)}{y\,(\lambda_1)} = \frac{y\,(\lambda_н)}{y\left(\dfrac{1}{\lambda_н}\right)} = \lambda_н^2\,\frac{\tau\left(\dfrac{1}{\lambda_н}\right)}{\tau\,(\lambda_н)}\,. \qquad (5.18)$$

Подставляя в (5.18) выражение для $\lambda_н^2$ из (4.49), после алгебраических преобразований имеем

$$\frac{p_1}{p_н} = \frac{2k}{k+1}\,M_н^2 - \frac{k-1}{k+1}\,. \qquad (5.19)$$

5.4.3. Основное динамическое соотношение для прямого скачка. Ударная адиабата. Основное динамическое соотношение связывает изменение давления с изменением плотности в скачке уплотнения. Подставим в (5.17) выражение для $\lambda_н^2$ из (4.49)

и, преобразуя его совместно с (5.19), получим ***основное динамическое соотношение***, называемое ***ударной адиабатой*** и известное как соотношение Ренкина-Гюгонио:

$$\frac{p_1 - p_н}{\rho_1 - \rho_н} = k\,\frac{p_1 + p_н}{\rho_1 + \rho_н}; \qquad (5.20)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \frac{\dfrac{k+1}{k-1} + \dfrac{p_н}{p_1}}{1 + \dfrac{(k+1)\,p_н}{(k-1)\,p_1}}. \qquad (5.21)$$

Сравним изменение плотности газа при ударном сжатии в скачке уплотнения, определяемое формулой (5.21), с изоэнтропийным сжатием, подчиняющимся закону

$$\frac{\rho_1}{\rho_н} = \left(\frac{p_1}{p_н}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

На рис. 5.4 в TS-координатах показаны оба процесса. Ударная адиабата показана сплошной линией и представляет собой геометрическое место точек, изображающих состояние газа за

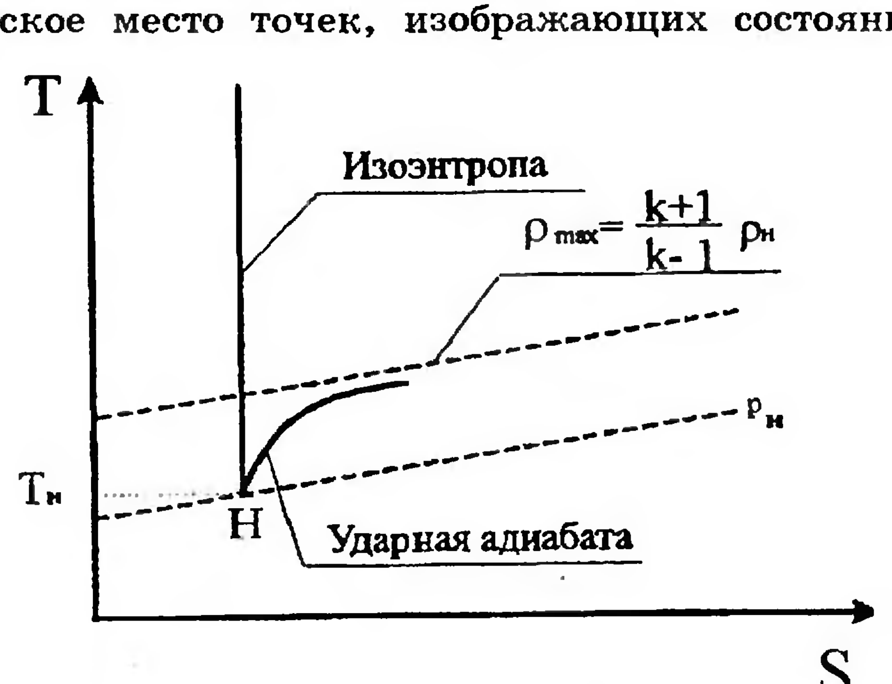


Рис. 5.4. Сравнение ударной адиабаты и изоэнтропы

скачками различной интенсивности. При $\frac{p_1}{p_н} \to \infty$ ударная адиабата асимптотически стремится к изохоре:

$$\rho_{1_{max}} = \rho_н \lambda_{max}^2 = \rho_н \frac{k+1}{k-1}. \quad (5.22)$$

При $k = 1{,}4$ $\rho_{1_{max}} = 6\rho_н$. Ограничение в увеличении плотности газа при ударном сжатии объясняется разогревом газа за счет работы вязких напряжений. Изоэнтропийное сжатие не ограничено и пропорционально давлению.

5.5. Сильные и слабые ударные волны и скорость их распространения

Сильными ударными волнами называются волны, изменение давления Δp во фронте которых соответствует условию

$$\frac{\Delta p}{p} \approx 1. \quad (5.23)$$

Слабыми ударными волнами, или просто *слабыми волнами*, называются такие, изменение давления Δp во фронте которых соответствует условию

$$\frac{\Delta p}{p} << 1. \quad (5.24)$$

Рассмотрим возникновение ударной волны на примере поршня, движущегося в трубе с одним открытым концом (рис. 5.5). На рис. 5.5,*а* показан поршень в начальный момент времени, слева — ось ординат, на которой будут откладываться значения давления и температуры для качественной оценки их изменения. Пусть поршень сдвинулся слева направо за время Δt (рис. 5.5,*б*). Перед ним образовалась слабая волна сжатия, движущаяся со скоростью звука a_1. Она показана жирной линией,ее высота в некотором масштабе отражает значение температуры в ней. Эта слабая волна за время Δt пройдет расстояние $a_1 \Delta t$. В следующий момент времени (рис. 5.5,*в*) движение поршня

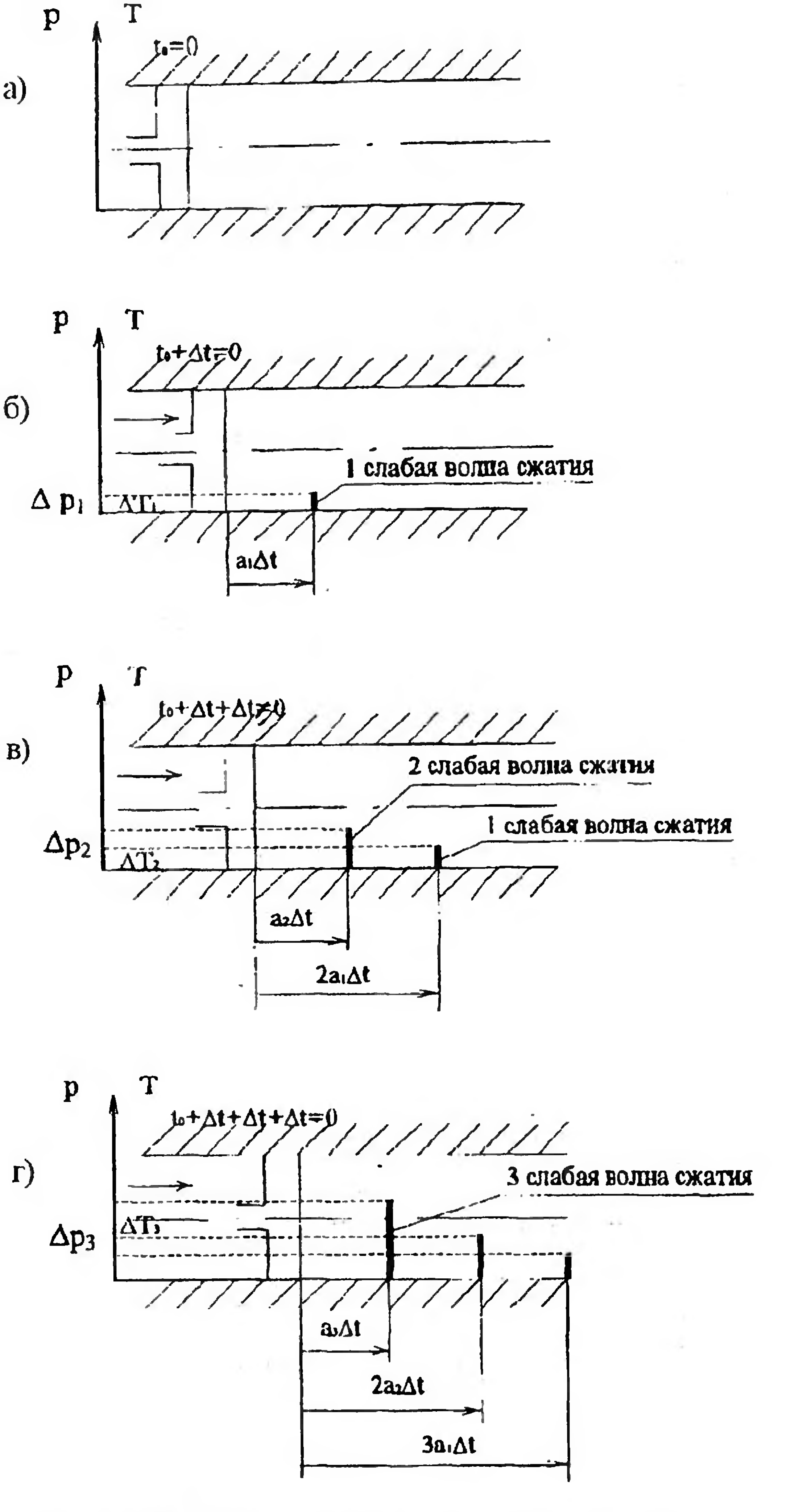


Рис. 5.5. Образование сильных волн сжатия

вправо вызовет вторую волну, в которой давление и температура будут больше, чем в первой. Первая волна пройдет расстояние $2a_1\Delta t$. Так как скорость движения второй волны больше, она начинает догонять первую. Итак, каждая последующая слабая волна за счет роста давления в ней и температуры будет нагонять каждую предыдущую, пока они не сольются в один фронт и не образуют ***сильную волну сжатия***.

Получим выражения для скорости волны сжатия в неподвижном газе, следуя [9]. Выберем в качестве системы объем газа, заключенный между сечениями 1 и H, расположенными на расстоянии dx в цилиндрическом канале с поршнем (рис. 5.6). Пусть под действием резкого смещения поршня в трубе возникла и распространяется слева направо сильная волна сжатия. За время dt волна переместится на расстояние dx. При этом в системе 1—H произойдет повышение давления от $p_н$ (давление невозмущенного газа) до p_1 (давление за фронтом волны сжатия). В соответствии с повышением давления плотность должна повыситься на величину

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_н .$$

Увеличение плотности может произойти только в случае втекания некоторого количества газа dm из объема 1—2 в объем H—1:

$$dm = (\rho_1 - \rho_н)\, F\, dx, \tag{5.25}$$

Рис. 5.6. К расчету скорости ударной волны

где F — площадь сечения трубы.

Таким образом, за фронтом волны газ движется в направлении волны сжатия с некоторой скоростью $w_п$, которую можно определить из уравнения расхода (3.5)

$$dm = \rho F w_п \, dt. \tag{5.26}$$

Отсюда получаем

$$w_п = \frac{\rho_1 - \rho_н}{\rho_1} \frac{dx}{dt}. \tag{5.27}$$

Скорость движения волны $w_в$ определяется как

$$w_в = \frac{dx}{dt}, \tag{5.28}$$

и с учетом (5.27) получаем, что

$$w_в = w_п \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_н}. \tag{5.29}$$

Запишем уравнение количества движения для системы 1-H, полагая, что масса газа объема 1-H $\Delta m_н = \rho_н F dx$ перейдет из состояния покоя в состояние движения со скоростью $w_п$. Изменение количества движения будет равно импульсу силы из-за разности давлений, действующих в сечениях 1 и H.

Тогда

$$(p_1 - p_н) F \, dt = \rho_н F_н (w_п - 0) \, dx, \tag{5.30}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = w_п = \frac{p_1 - p_н}{\rho_н w_п}. \tag{5.31}$$

Подставляя в (5.31) значение $w_п$ из (5.29), получим выражение для определения ***скорости распространения сильной волны сжатия*** как функции давления и плотности:

$$w_в = \sqrt{\frac{(p_1 - p_н)\,\rho_1}{(\rho_1 - \rho_н)\,\rho_н}} \ . \qquad (5.32)$$

Аналогичное выражение для скорости потока за фронтом ударной волны $w_п$ получим, подставив (5.32) в (5.29):

$$w_п = \sqrt{\frac{(p_1 - p_н)\,(\rho_1 - \rho_н)}{\rho_1\,\rho_н}} \ . \qquad (5.33)$$

Если рассмотреть процесс в обращенном движении, т. е. остановить ударную волну и рассматривать скачок уплотнения, то скорость ударной волны $w_в$ будет численно равна скорости набегающего потока $w_н$, т. е.

$$w_н = |w_в| = \sqrt{\frac{(p_1 - p_н)\,\rho_1}{(\rho_1 - \rho_н)\,\rho_н}}. \qquad (5.34)$$

Используя (5.17), можно записать выражение для скорости потока w_1 за скачком уплотнения:

$$w_1 = \sqrt{\frac{(p_1 - p_н)\,\rho_н}{(\rho_1 - \rho_н)\,\rho_1}}. \qquad (5.35)$$

Скорость потока за ударной волной $w_п$ меньше скорости волны $w_в$. Поэтому массовый поток будет отставать от ударной волны. Если волна предоставлена сама себе и не подпитывается извне энергией, то, вследствие волновых потерь, она быстро ослабевает и вырождается в слабую (звуковую) волну.

Рассмотрим слабые волны возмущения давления. В случае слабой волны $\rho_1 \approx \rho_н$ и

$$p_1 \cong p_н \ . \qquad (5.36)$$

Тогда из (5.32) получаем, что скорость слабой волны равна скорости звука:

$$w_в = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a, \qquad (5.37)$$

т. е. слабая волна является акустической волной. Из (5.3) следует, что газ за фронтом слабой волны, с учетом (5.36), неподвижен, т. к. $w_п = 0$. В действительности, звуковая волна состоит из правильно чередующихся областей сжатия и разрежения, а газ за фронтом находится в слабом колебательном движении.

5.6. О возможности существования волн сжатия и разрежения

Выше была показана возможность образования и существования сильных ударных волн сжатия. Используем модель с поршнем (см. рис. 5.5) для анализа возможности образования сильных ударных волн разрежения. Пусть поршень движется справа налево, создавая перед собой волну разрежения. Так как при разрежении давление и температура во фронте волны будут уменьшаться, то каждое последующее возмущение будет распространяться с меньшей скоростью, чем предыдущее. Поэтому возмущения будут удаляться друг от друга, а сам фронт волн разрежения будет размываться и исчезать. Это означает, что в рассматриваемых условиях (энергетической изолированности) существование сильных ударных волн разрежения невозможно.

Для доказательства воспользуемся принципом уменьшения давления торможения (см. § 4.8). Выразим коэффициент, определяющий изменение давления торможения в ударной волне, из (5.16) с помощью (5.14) через приведенную скорость λ_i ударной волны:

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_н^*} = \frac{q\,(\lambda_н)}{q\left(\dfrac{1}{\lambda_н}\right)}. \tag{5.38}$$

На рис. 5.7 приведен график σ, рассчитанный по уравнению (5.38) для $k = 1{,}4$. Анализ графика позволяет сделать следующие выводы. В соответствии с принципом уменьшения давления торможения область значений $\lambda < 1$ является областью отсутствия ударных волн, так как соответствует $\sigma > 1$, т. е. ударные волны могут существовать только в сверхзвуковом потоке.

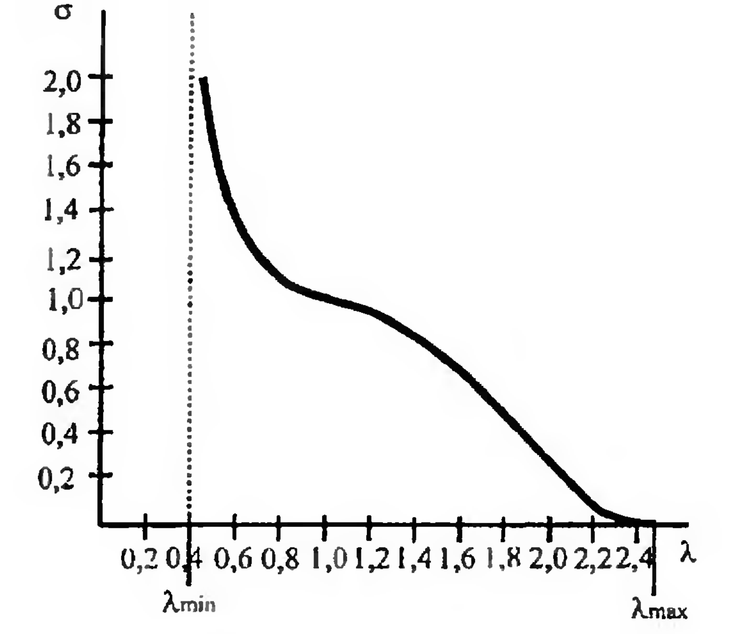


Рис. 5.7. К обоснованию возможности существования ударных волн

Согласно основному кинематическому соотношению (5.14) сверхзвуковому потоку соответствуют только волны сжатия, которые возникают при торможении потока. В соответствии с (5.14) должно выполняться условие $\lambda_1 < \lambda_н$, поэтому сильные волны разрежения не могут существовать в энергетически изолированных потоках.

Слабым волнам соответствует условие изоэнтропийности, или постоянства p^*, при $\lambda = 1$. Более строго можно показать [27], что изменение давления торможения в слабой волне является величиной третьего порядка малости по отношению к интенсивности скачка:

$$\frac{p_1^*}{p_н^*} \approx 1 - \frac{2k\,(k-1)^2}{3\,(k+1)^2}\,(M_н^2 - 1)^3. \qquad (5.39)$$

Поэтому изменением p^* для слабых волн можно пренебречь, а это означает возможность существования как слабых (акустических) волн сжатия, так и слабых волн разряжения.

5.7. Ударные волны с подводом энергии в форме тепла. Тепловые скачки

Рассмотрим ударную волну, или прямой скачок уплотнения с подводом энергии в форме тепла [15]. Пусть справедливы все

условия и допущения, сделанные в 5.4 при формулировании модели расчета, кроме (5.2). Условие (5.2) заменим условием

$$dq_{\text{н}} > 0 \qquad dl_{\text{тех}} = 0. \tag{5.40}$$

Уравнение энергии (4.9) запишется следующим образом:

$$q_{\text{н}} = c_p\,(T_1^* - T_{\text{н}}^*). \tag{5.41}$$

Введем соотношение

$$n^2 = \frac{q_{\text{н}}}{C_p\,T_{\text{н}}^*} \tag{5.42}$$

и запишем уравнение (5.41) в виде

$$n^2 = \frac{T_1^*}{T_{\text{н}}^*} - 1. \tag{5.43}$$

Из уравнения количества движения (4.85) с учетом $P_x = 0$ и $a_{\text{кр}} = \sqrt{\dfrac{2k}{k+1} RT^*}$ получим следующее равенство:

$$\lambda_{\text{н}} + \frac{1}{\lambda_{\text{н}}} = \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{\text{н}}^*}}\left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right). \tag{5.44}$$

Подставляя (5.43) в (5.44), окончательно имеем

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{н}} + \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}\right) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{н}} - \frac{1}{\lambda_{\text{н}}}\right)\right]^2 + n^2}\,. \tag{5.45}$$

При наличии подвода тепла можно получить два решения для скачка. Первое решение следует из тривиального, дающего скачок пулевой интенсивности равенства, т. е. если $n = 0$, то

$$(\lambda_1)_1 = \lambda_{\text{н}} \quad \text{и} \quad w_1 = w_{\text{н}}. \tag{5.46}$$

Если n мало, то

$$(\lambda_1)_1 \approx \lambda_н - \frac{n^2}{\lambda_н - \frac{1}{\lambda_н}} + \dots \quad (5.47)$$

Это не что иное, как ***скачок конденсации***, когда влага, находящаяся в потоке в результате перенасыщения, вследствие расширения рабочего тела выпадает в виде капель. Скачок конденсации представляет собой один из видов тепловых скачков [26] и может иметь место как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоке. В первом случае, при $\lambda_н < 1$, он является тепловым скачком разрежения и ограничен условием

$$(\lambda_1)_1 \le 1. \quad (5.48)$$

Во втором случае, при $\lambda_н > 1$, это тепловой скачок уплотнения, ограниченный условием

$$(\lambda_1)_1 \ge 1. \quad (5.49)$$

Знак равенства в (5.48) и (5.49) соответствует ***тепловому кризису***.

Второе решение получается аналогично решению для прямого скачка, т. е.

$$(\lambda_1)_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_н - \frac{1}{\lambda_н}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\right]^2 + n^2}\,. \quad (5.50)$$

Если $n = 0$, то $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_н}$ — условие адиабатического скачка (5.14).

Если n очень мало, то имеем

$$(\lambda_1)_2 \approx \lambda_н + \frac{n^2}{\lambda_н - \frac{1}{\lambda_н}} + \dots$$

и скачок практически не отличается от обычного скачка. С другой стороны, если n велико, мы будем иметь детонационную волну. ***Детонационная волна*** представляет собой последо-

вательное сочетание двух скачков: адиабатической плоской волны, осуществляющей сжатие и воспламенение горючей смеси, и следующей за ней зоны горения. Сама зона горения представляет собой ***тепловой скачок разрежения*** в дозвуковом течении, т. к. скорость за прямой ударной волной дозвуковая. При этом должно выполняться условие $(\lambda_1)_2 \le 1$ (5.50), вытекающее из закона обращения воздействий. Знак равенства соответствует тепловому кризису.

5.8. Распространение слабых (звуковых) волн давления в газовых потоках. Характеристики

Рассмотрим распространение слабых волн давления в газовых потоках различной скорости от точечного источника A, работающего с частотой 1 Гц, т. е. через секунду (рис. 5.8). В неподвижном газе ($w = 0$) слабые волны давления распространяются со скоростью звука a в виде сферических концентрических звуковых волн во всем пространстве. Из-за сноса дозвуковым потоком $w = a/2$ сферы распространения волн располагаются неконцентрично. В звуковом потоке $w = a$, сферы распространяются только в полупространстве за источником A. В сверхзвуковом потоке $w = 2a$, звуковые волны локализуются внутри конуса Маха, вытянутого по потоку за источником A. Поверхность конуса Маха представляет собой геометрическое место положений фронта возмущения с бесконечно малым сжатием. Толщина фронта — порядка длины свободного пробега молекул. Проекции образующих конуса на плоскость называются ***характеристиками.***

Свойства характеристик:

1. В соответствии с изложенным в § 5.6 характеристики существуют только в сверхзвуковых потоках, причем как характеристики сжатия, так и характеристики разрежения.

2. Угол наклона α_0 характеристик к вектору скорости невозмущенного потока $w_н$ определяется как (см. рис. 5.8,*г*)

$$\sin \alpha_0 = \frac{a_н}{w_н} = \frac{1}{M_н}. \tag{5.51}$$

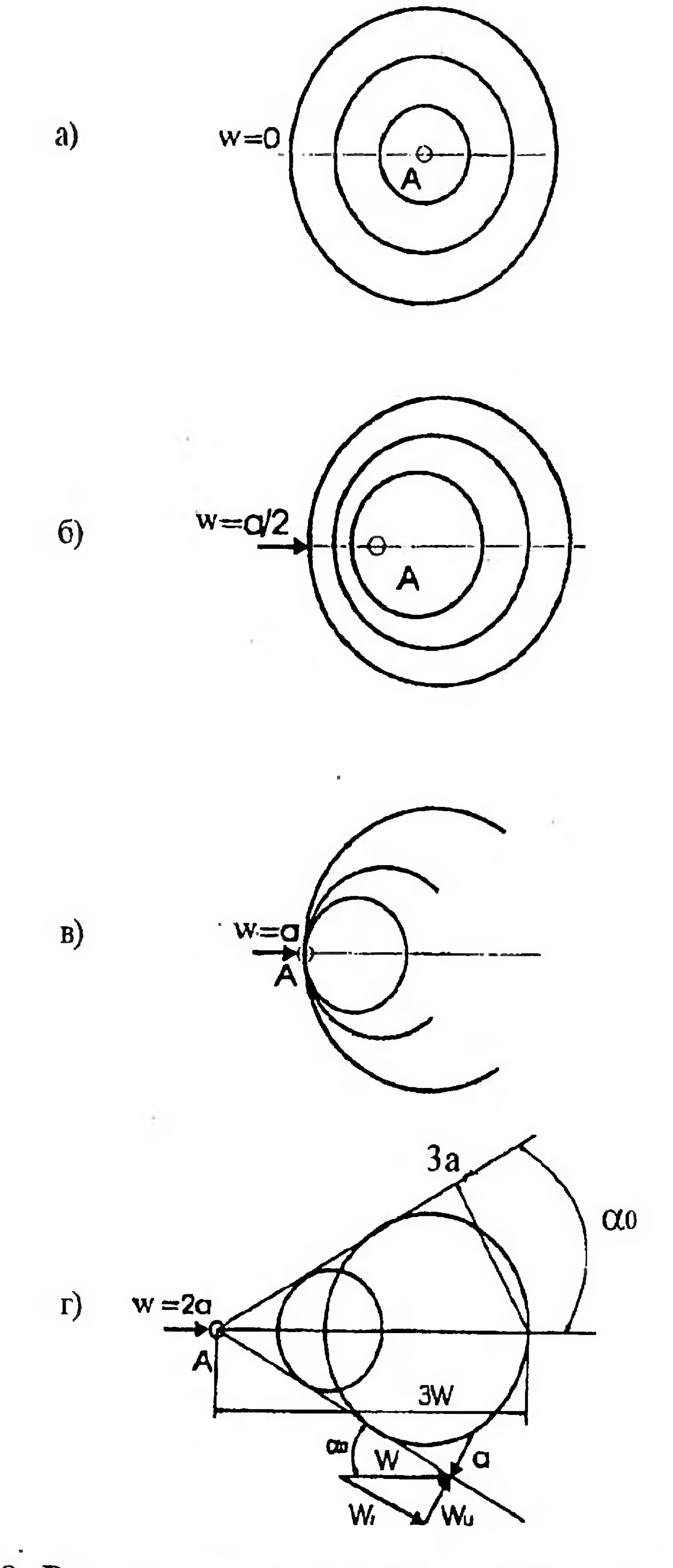


Рис. 5.8. Распространение элементарных звуковых волн в газовых потоках

При $M = 1$ $\alpha_0 = 90^\circ$, а при $M = \infty$ $\alpha_0 = 0^\circ$, т. е. положение характеристик совпадает с вектором максимальной скорости. Из (5.51) следует, что в потоке с равномерным полем скоростей характеристики прямолинейны, а с неравномерным полем — криволинейны, угол наклона касательной в данной точке

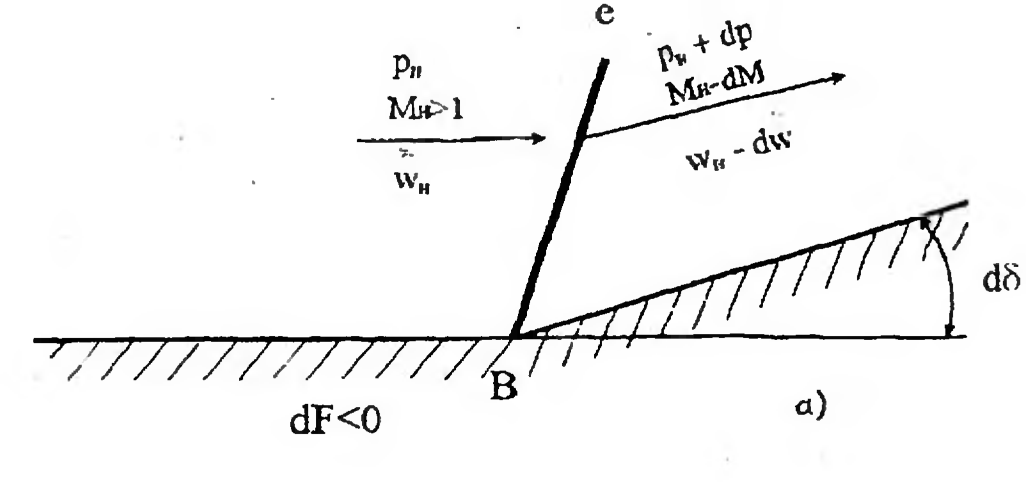
$$\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{M}. \tag{5.52}$$

3. Параметры потока изменяются только при пересечении характеристики и не изменяются вдоль характеристики.

Нормальная составляющая вектора скорости к фронту характеристики $w_{нп}$ равна местной скорости звука a, т. е.

$$w_{нп} = a. \tag{5.53}$$

4. Характеристика распространяется в направлении нормали к фронту со скоростью звука. Процесс на характеристиках энергетически изолированный и изоэнтропийный. При элементарном геометрическом воздействии $\pm dF$ на сверхзвуковой поток в нем возникают слабые волны сжатия или разрежения. В соответствии с уравнением обращения воздействия (4.98) для изоэнтропийного энергоизолированного процесса в волне произойдет элементарное изменение скорости $\pm dw$, давления $\pm dp$ и других параметров газа. Пример такого воздействия на плоский сверхзвуковой поток отклонением стенки на угол $\pm d\delta$ показан на рис. 5.9. На характеристике сжатия Be давление, температура и плотность газа повышаются, скорость снижается. На характеристике разрежения Bf давление, температура и плотность понижаются, скорость повышается. При этом на характеристике сжатия вектор скорости отклоняется на угол $-d\delta$, на характеристике разрежения — на угол $+d\delta$. Несмотря на бесконечно малое изменение параметров на одной характеристике, последовательное пересечение потоком множества характеристик обеспечивает непрерывный и изоэнтропийный процесс изменения параметров. Области сверхзвуковых течений, в которых давление вдоль линии тока изменяется непрерывно, называются *волнами сжатия*, или *разрежения*.



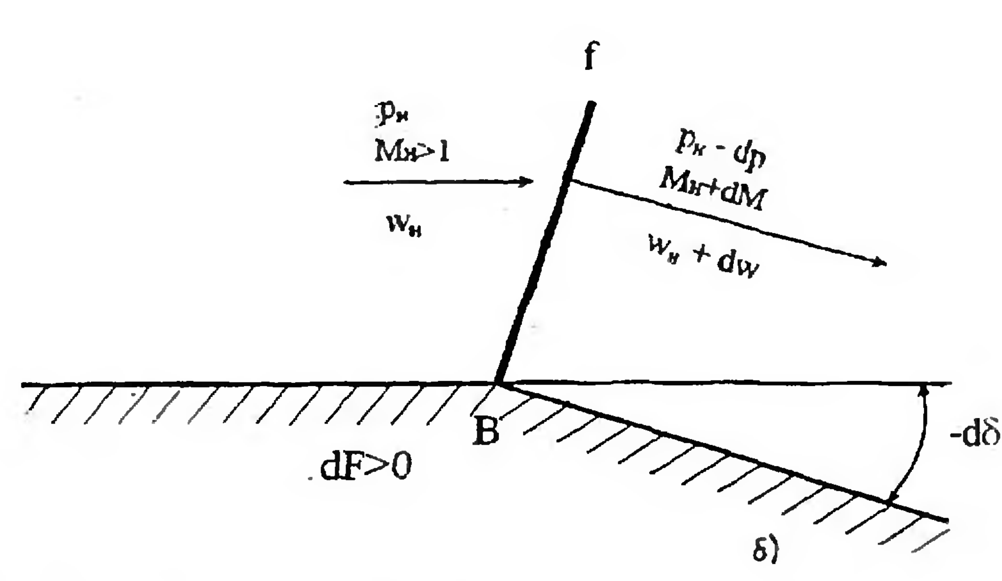


Рис. 5.9. Элементарное геометрическое воздействие на сверхзвуковой поток

5.9. Косые скачки уплотнения

В ряде случаев скачкообразного торможения сверхзвукового потока возникает необходимость изменения направления вектора скорости. Тогда торможение осуществляется в косых скачках уплотнения. Явление скачкообразного торможения сверхзвукового потока с изменением направления вектора скорости, сопровождающееся диссипацией энергии, называется ***косым скачком уплотнения***. Фронт косого скачка составляет с вектором скорости набегающего потока угол $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Под ***углом*** α понимается угол между вектором скорости набегающего потока $w_н$ и проекцией этого вектора $w_{н\tau}$ на направление фронта скачка (рис. 5.10).

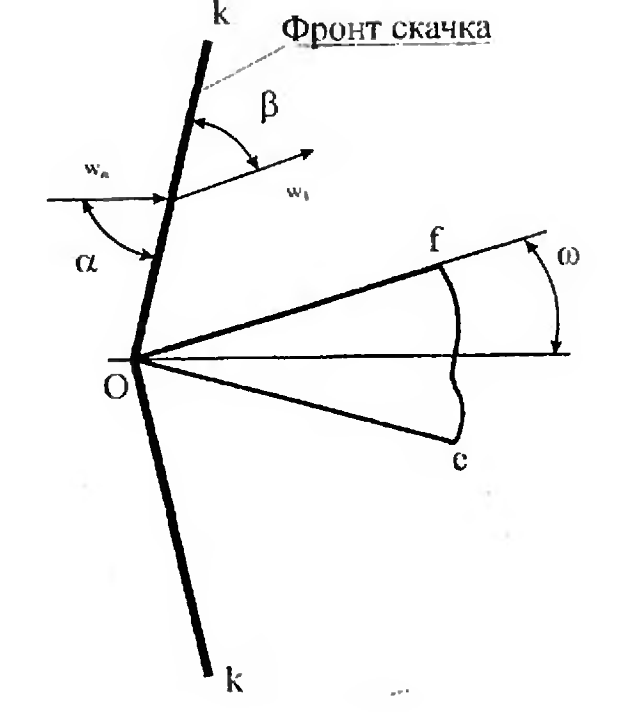


Рис. 5.10. Косой скачок уплотнения на плоском клине

Рассмотрим косой скачок уплотнения, возникающий при обтекании сверхзвуковым потоком плоского клина (рис. 5.10). Кроме торможения (в скачке Ok), поток с вектором $w_н$ вынужден повернуть на угол, равный полууглу клина ω, и следовать параллельно образующей клина с вектором w_1. При этом предполагается, что при обтекании поверхностей клина Of (или Oe) вязкое взаимодействие (пограничный слой) отсутствует и газ идеальный всюду кроме фронта скачка Ok (коэффициент вязкости $\mu = 0$). Угол β называется ***углом между фронтом и вектором скорости после скачка уплотнения***. Очевидно, $\beta < \frac{\pi}{2}$.

Разложим векторы скорости $w_н$ набегающего потока и w_1 — потока за скачком — на нормальные к скачку и тангенциальные (касательные) составляющие. Будем обозначать их соответствующими индексами n и τ (рис. 5.11). Запишем очевидные геометрические соотношения:

$$w_н^2 = w_{нn}^2 + w_{н\tau}^2, \quad w_1^2 = w_{1n}^2 + w_{1\tau}^2;$$

$$w_{нn} = w_н \sin\alpha, \quad w_{1n} = w_1 \sin\beta;$$

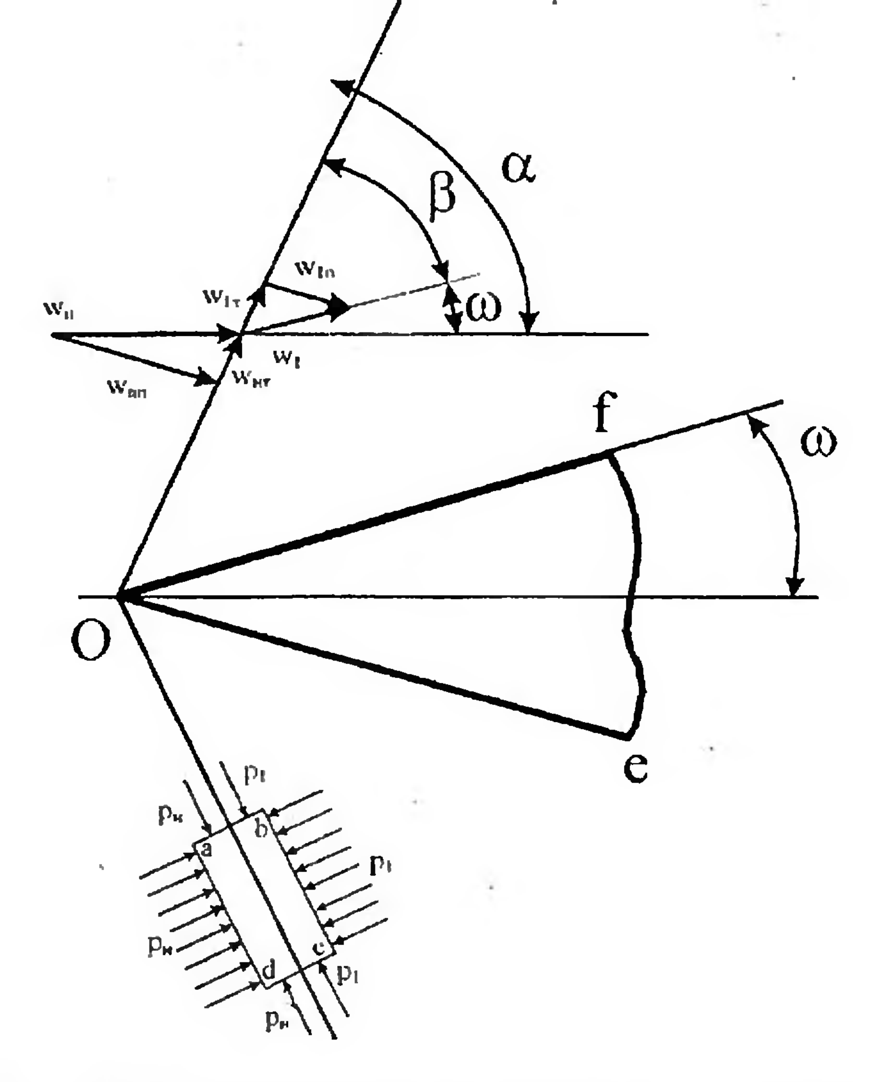


Рис. 5.11. К расчету косого скачка уплотнения

$$w_{н\,\tau} = w_{н} \cos\alpha, \quad w_{1\,\tau} = w_1 \cos\beta\,; \tag{5.54}$$

$$w_{н\,n} = w_{н\,\tau} \operatorname{tg}\alpha, \quad w_{1n} = w_{н\,\tau} \operatorname{tg}\beta\,;$$

$$\alpha = \omega + \beta. \tag{5.55}$$

Запишем уравнение количества движения в проекции на направление фронта скачка. В качестве системы выберем параллелепипед, проекция которого на плоскость (рис. 5.11) обозначена $abcd$. Втекание потока в соответствии с векторной диаграммой скоростей осуществляется через грани, содержащие ребра ab и ad, вытекание — через грани с ребрами dc и cb. Примем, что площади граней, проходящих через ребра ab и cd, составляют F_{ab}. За положительное направление на фронте скачка примем то, которое совпадает с направлением векторов

w_τ. Тогда искомое уравнение с учетом постоянства сечения потока запишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}p_1 \cdot F_{ab} + \frac{1}{2}p_н \cdot F_{ab} - \frac{1}{2}p_1 \cdot F_{cd} - \frac{1}{2}p_н \cdot F_{cd} =$$

$$= G_\tau (w_{1\tau} - w_{н\,\tau}), \tag{5.56}$$

где G_τ — расход газа в направлении фронта скачка.

Из (5.56) следует, что

$$w_{1\,\tau} = w_{н\,\tau}, \tag{5.57}$$

т. е. ***тангенциальная составляющая в косом скачке не изменяется, а скачок совершает только нормальная составляющая так, что*** $w_{1n} < w_{н\,n}$. Полученный результат позволяет построить следующую модель расчета прямого скачка.

5.9.1. Модель расчета косого скачка. Для косого скачка справедливы все допущения 1—4, сделанные в § 5.4.1 при рассмотрении модели расчета прямого скачка, в частности, допущения об энергоизолированности течения и необратимости процесса в системе. Косой скачок рассматривается как прямой скачок для нормальной составляющей скорости, сносимый вдоль фронта скачка со скоростью w_τ. Для построения модели расчета введем энергетические характеристики, описывающие течение нормальной составляющей потока w_n ($w_{н\,n}$, w_{1n}).

Температурой частичного торможения называют температуру T_n^*, характеризующую полную энергию нормальной составляющей потока, т. е.

$$T_n^* = T + \frac{w_n^2}{2C_p}. \tag{5.58}$$

Температура частичного торможения численно равна тому значению температуры газа, которое он примет в энергоизолированной системе при торможении от значения $w_н$ до значения w_τ, т. е. при преобразовании кинетической энергии потока, соответствующей только нормальной составляющей скорости $w_{н\,n}$,

в тепловую энергию. Очевидно, что температура торможения T^* и температура частичного торможения T^*_n связаны соотношением

$$T^* = T + \frac{w^2}{2C_p} = T + \frac{w_n^2}{2C_p} + \frac{w_\tau^2}{2C_p} = T^*_n + \frac{w_\tau^2}{2C_p}\,. \qquad (5.59)$$

С учетом энергоизолированности течения и условия (5.57) можно записать

$$T^*_{\text{н}} = T^*_1\,; \qquad (5.60)$$

$$T^*_{\text{н}\,n} = T^*_{1n}\,. \qquad (5.61)$$

Таким образом, температура частичного торможения на косом скачке не изменяется.

Температуре частичного торможения соответствует ***критическая скорость звука***

$$a_{\text{кр}\,n} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}, \qquad (5.62)$$

которая с учетом (5.61) также не изменяется на косом скачке, т. е.

$$a_{\text{кр н}\,n} = a_{\text{кр}\,1\,n} = a_{\text{кр}\,n}. \qquad (5.63)$$

Приведенные скорости $\lambda_{\text{н}\,n}$ и λ_{1n} можно представить как

$$\lambda_{\text{н}\,n} = \frac{w_{\text{н}\,n}}{a_{\text{кр}\,n}}, \quad \lambda_{1n} = \frac{w_{1n}}{a_{\text{кр}\,n}}\,. \qquad (5.64)$$

Вследствие того, что $T^* \neq T^*_n$ и $a_{\text{кр}} \neq a_{\text{кр}\,n}$, $\lambda_{\text{н}\,n}$ и λ_{1n} не являются нормальными составляющими приведенных скоростей,

$$\lambda_{\text{н}} = \frac{w_{\text{н}}}{a_{\text{кр}}} \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{w_1}{a_{\text{кр}}}. \qquad (5.65)$$

Из первого соотношения (5.64) в виде $\lambda^2_{\text{н}\,n} = \dfrac{w^2_{\text{н}\,n}}{a^2_{\text{кр}\,n}}$, подставляя в него (5.62), в котором T^*_n выражено через T^* из (5.59), а w_τ — через $w_\text{н}$ из (5.53), с учетом (5.52) получим после преобразований

$$\lambda^2_{\text{н}\,n} = \frac{\lambda^2_\text{н} \sin^2 \alpha}{1 - \dfrac{k-1}{k+1} \lambda^2_\text{н} \cos^2 \alpha}. \tag{5.66}$$

Для чисел Маха, соответствующих нормальным составляющим скоростей потока $w_{\text{н}\,n}$ и w_{1n}, справедливы тригонометрические соотношения:

$$\text{M}_{\text{н n}} = \frac{w_{\text{н}\,n}}{a_\text{н}} = \frac{w_\text{н} \sin \alpha}{a_\text{н}} = \text{M}_\text{н} \sin \alpha, \tag{5.67}$$

где

$$a_\text{н} = \sqrt{kRT_\text{н}}\;; \tag{5.68}$$

$$\text{M}_{1\text{n}} = \frac{w_{1n}}{a_1} = \frac{w_1 \sin \beta}{a_1} = \text{M}_1 \sin \beta, \tag{5.69}$$

где

$$a_1 = \sqrt{kRT_1}. \tag{5.70}$$

Для чисел М и λ независимо от индексов (н или n) справедливы формулы связи (4.48) и (4.49). Так как скалярные параметры одинаковы для потока с вектором скорости w и потока для нормальной составляющей, то справедливы следующие соотношения для газодинамических функций:

$$\begin{gathered} T_\text{н} = T^*_\text{н}\, \tau(\lambda_\text{н}),\;\; T_1 = T^*_1\, \tau(\lambda_1), \\ T_\text{н} = T^*_{\text{н}\,n}\, \tau(\lambda_{\text{н}\,n}),\;\; T_1 = T^*_{1n}\, \tau(\lambda_{1n}). \end{gathered} \tag{5.71}$$

Из (5.71) с учетом (5.60) и (5.61) получаем

$$\frac{\tau(\lambda_{\text{н}})}{\tau(\lambda_1)} = \frac{\tau(\lambda_{\text{н}\,n})}{\tau(\lambda_{1n})}. \tag{5.72}$$

Так как для скачка справедливо соотношение

$$\frac{p_{\text{н}}}{\rho_{\text{н}} T_{\text{н}}} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} = R, \tag{5.73}$$

то с учетом (5.72) можно записать соотношение, связывающее газодинамические функции для параметров p и ρ:

$$\frac{\pi(\lambda_{\text{н}})}{\pi(\lambda_1)} = \frac{\pi(\lambda_{\text{н}\,n})}{\pi(\lambda_{1n})}, \quad \frac{\varepsilon(\lambda_{\text{н}})}{\varepsilon(\lambda_1)} = \frac{\varepsilon(\lambda_{\text{н}\,n})}{\varepsilon(\lambda_{1n})}. \tag{5.74}$$

Аналогично температуре частичного торможения введем ***давление частичного торможения*** p_n^*, характеризующее качество энергии потока, соответствующее нормальной скорости:

$$p_n^* = \frac{p}{\pi(\lambda_n)}. \tag{5.75}$$

Поскольку

$$p^* = \frac{p}{\pi(\lambda)}, \tag{5.76}$$

то из (5.74) следует, что ***потери полного давления в косом скачке*** $\sigma_{\text{к.с}}$ могут быть определены как

$$\sigma_{\text{к.с}} = \frac{p_1^*}{p_{\text{н}}^*} = \frac{p_{1n}^*}{p_{\text{н}\,n}^*}. \tag{5.77}$$

Из (5.72)—(5.77) следует, что ***соотношения между всеми скалярными параметрами до и после прямого скачка полностью сохраняются и для косого скачка.***

Используем выражения, полученные ранее для прямого скачка при расчете косого скачка как прямого для нормальных составляющих скорости.

Основное кинематическое соотношение

$$\lambda_{\text{н } n} \cdot \lambda_{1n} = 1, \quad \text{или} \quad w^2_{\text{н } n} \cdot w^2_{1n} = a^2_{\text{кр } n}. \tag{5.78}$$

Уменьшение давления торможения

$$\sigma_{\text{к.с}} = \frac{p_1^*}{p_{\text{н}}^*} = \frac{p_{1n}^*}{p_{\text{н } n}^*} = \frac{q(\lambda_{\text{н } n})}{q(\lambda_{1n})} = \frac{q(\lambda_{\text{н } n})}{q\left(\dfrac{1}{\lambda_{\text{н } n}}\right)}. \tag{5.79}$$

Увеличение плотности

$$\frac{\rho_1}{\rho_{\text{н}}} = \lambda^2_{\text{н } n}. \tag{5.80}$$

Увеличение статического давления

$$\frac{p_1}{p_{\text{н}}} = \frac{y(\lambda_{\text{н } n})}{y\left(\dfrac{1}{\lambda_{\text{н } n}}\right)} = \frac{2}{k+1}\text{M}^2_{\text{н n}} - \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{k+1}\text{M}^2_{\text{н}}\sin^2\alpha - \frac{k-1}{k+1}. \tag{5.81}$$

Увеличение температуры

$$\frac{T_1}{T_{\text{н}}} = \frac{\tau(\lambda_{1n})}{\tau(\lambda_{\text{н } n})} = \frac{\tau\left(\dfrac{1}{\lambda_{\text{н } n}}\right)}{\tau(\lambda_{\text{н } n})}. \tag{5.82}$$

Связь между приведенными скоростями $\lambda_{\text{н}}$ и λ_1 и векторами скорости $w_{\text{н}}$ и w_1 имеем из (5.53) и (5.57):

$$\lambda_1 = \lambda_{\text{н}}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}, \quad w_1 = w_{\text{н}}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{5.83}$$

Модель расчета параметров замыкается соотношением для α, β, $\lambda_{\text{н } n}$, которое получается от деления соотношений (5.54) друг на друга с учетом (5.78)

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\lambda_{\text{н}\,n}^2}\right) \qquad (5.84)$$

и ранее полученными выражениями (5.55) и (5.66).

5.9.2. Расчет параметров косых скачков. При решении задачи расчета косого скачка обычно известны граничные условия до косого скачка: $T_{\text{н}}^*$, $p_{\text{н}}^*$, $\lambda_{\text{н}}$ ($T_{\text{н}}$, $p_{\text{н}}$), угол наклона ω отклоняющей плоскости и теплофизические характеристики рабочего тела k, C_p, R. Очевидно, все параметры косого скачка могут быть определены, если будет определено значение приведенной скорости нормальной составляющей до скачка $\lambda_{\text{н}\,n}$. Однако непосредственно по заданным параметрам $\lambda_{\text{н}\,n}$ определить невозможно. Расчет строится следующим образом. Итерационным методом или графически решается система трех трансцендентных уравнений (5.55), (5.66) и (5.84) с тремя неизвестными $\lambda_{\text{н}\,n}$, α, β. Далее по значениям $\lambda_{\text{н}\,n}$ и α находятся все параметры по формулам (5.78)—(5.83).

5.9.3. Особенности изменения параметров в косых скачках. Особенности поведения косых скачков могут быть проанализированы с помощью диаграммы рис. 5.12, построенной на основании решения системы уравнений (5.55), (5.66) и (5.84) [2]. При этом задается изменение угла наклона α вектора скорости к фронту скачка в диапазоне $\alpha_0 < \alpha < 90^\circ$, где $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{\text{M}_{\text{н}}}\right)$, а число $\lambda_{\text{н}}$ или $\text{M}_{\text{н}}$ выступает в качестве параметра. Диаграмма строится как зависимость α от угла поворота потока ω для постоянных значений параметра $\text{M}_{\text{н}}$ ($\lambda_{\text{н}}$).

Из графиков диаграммы рис. 5.12 следует возможность существования двух видов косых скачков при одном значении ω и $\text{M}_{\text{н}}$. На диаграмме они отделены друг от друга пунктирной линий *a-b-b-...* Скачки, соответствующие точкам, лежащим ниже линии *a-b-b...*, имеют углы наклона α, меньшие, чем лежащие выше линии *a-b-b* (при прочих равных условиях, ω и $\text{M}_{\text{н}}$), и называются ***слабыми косыми скачками***, так как ско-

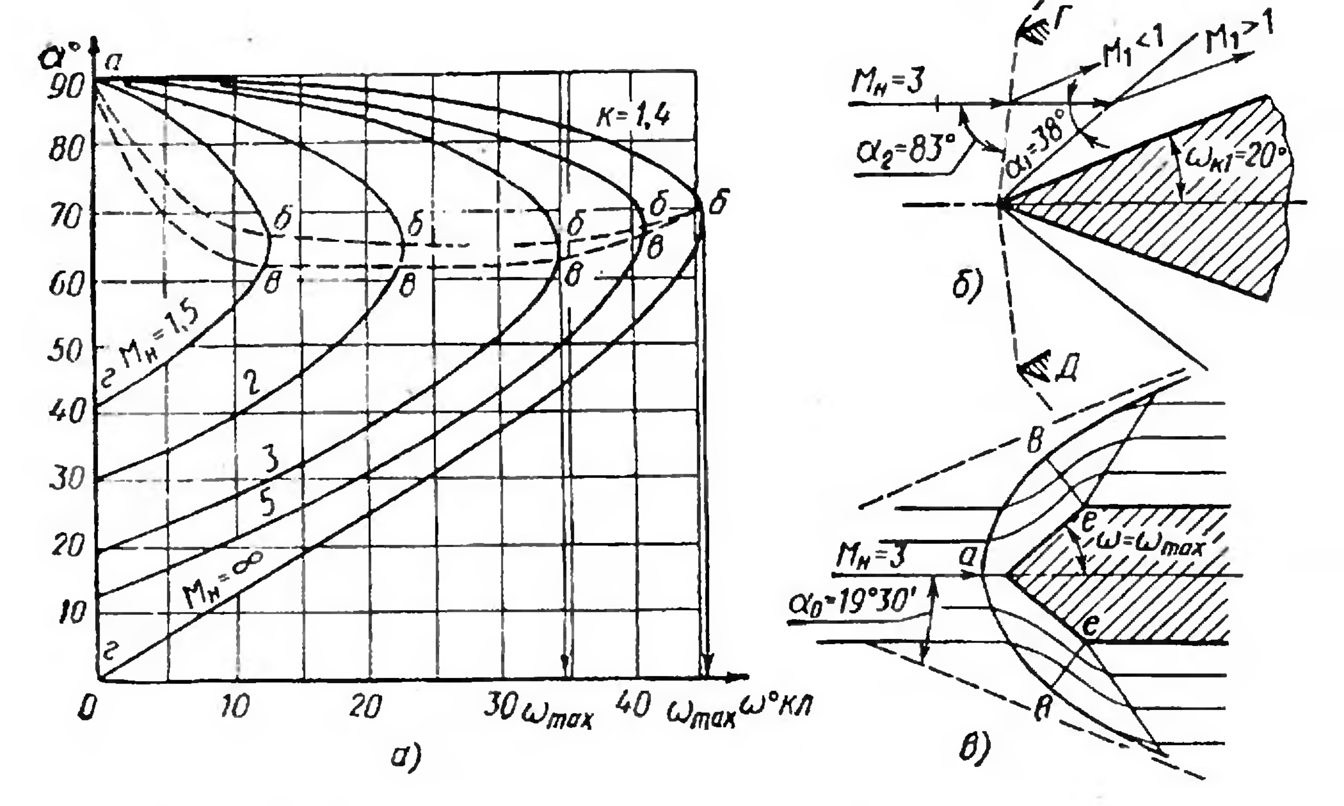


Рис. 5.12. Зависимость угла наклона α вектора скорости к фронту скачка от угла поворота потока в скачке ω и числа $M_н$

рость за ними остается сверхзвуковой, т. е. $M_1 > 1$. При $\omega = 0$ (точки *2*) косые скачки вырождаются в характеристики с углом наклона $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{M_н}\right)$.

Скачки, соответствующие точкам, лежащим выше линии *а-b-b...*, имеют большие углы наклона, скорость потока за ними дозвуковая, и они называются ***сильными косыми скачками***. При уменьшении угла ω интенсивность сильных косых скачков увеличивается, и при $\omega = 0$ они превращаются в прямые скачки. При уменьшении числа $M_н$ до единицы скачок вырождается в характеристику сжатия с углом $\alpha_0 = 90°$. В этом случае три точки — *б, в, г* — совмещаются с точкой *а*. Точки *в* соответствуют значениям $M_1 = 1$ за слабыми скачками.

На практике реализуются ***слабые косые скачки уплотнения*** (сплошные линии на рис. 5.12,*б*). Для реализации сильных косых скачков уплотнения необходимы дополнительные условия. В качестве таковых могут быть, например, твердые тела в

точках Г и Д, поддерживающие скачки (пунктирные линии на рис. 5.12,*б*).

Для каждого числа $M_н$ набегающего потока существует максимальное значение угла поворота потока ω_{max}, причем с ростом $M_н$ увеличивается и значение ω_{max}. При $M_н = \infty$ $\omega_{max} = 46^{\circ}$. На углах $\omega > \omega_{max}$ поток не может развернуться в косом скачке, косой скачок превращается в криволинейный отсоединенный скачок уплотнения, который отходит от препятствия. На фронте криволинейного скачка реализуются все возможные для данного числа $M_н$ углы наклона вектора скорости к фронту скачка от $\alpha = 90^{\circ}$ (прямой скачок) в центральной части до $\alpha_0 = \arcsin\left(\frac{1}{M_н}\right)$ на бесконечном удалении от оси. За точкой *а* (рис. 5.12,*в*) поток дозвуковой, после поворота он ускоряется до $\lambda = 1$ и далее в слабых волнах разрежения — до сверхзвуковой скорости. Таким образом, в случае необходимости поворота на угол $\omega > \omega_{max}$ сверхзвуковой поток переходит в дозвуковой. Это связано с тем, что при параметрах за косым скачком расход не может пройти в сечение, частично занятое телом. Переход на дозвуковое течение увеличивает давление и плотность, обеспечивая стационарное течение. Аналогичная ситуация возникает при обтекании затупленных тел и перед входным отверстием воздухозаборника, где течение реализуется с помощью отсоединенного скачка уплотнения.

5.10. Взаимодействие и отражение скачков уплотнения и характеристик

5.10.1. Пересечение скачков. При обтекании сверхзвуковым потоком плоской стенки *АБЕ* с двумя последовательными изломами в т. *А* и *Б*, отклоняющими поток сначала на угол ω_1 (стенка *АБ*), а затем — на угол ω_2 (стенка *БЕ*), образуются два косых скачка *АВ* и БВ (рис. 5.13). Такие скачки, поворачивающие поток в одну сторону, называются ***скачками одного семейства*** [28]. Их пересечение в точке *В* приводит к образованию

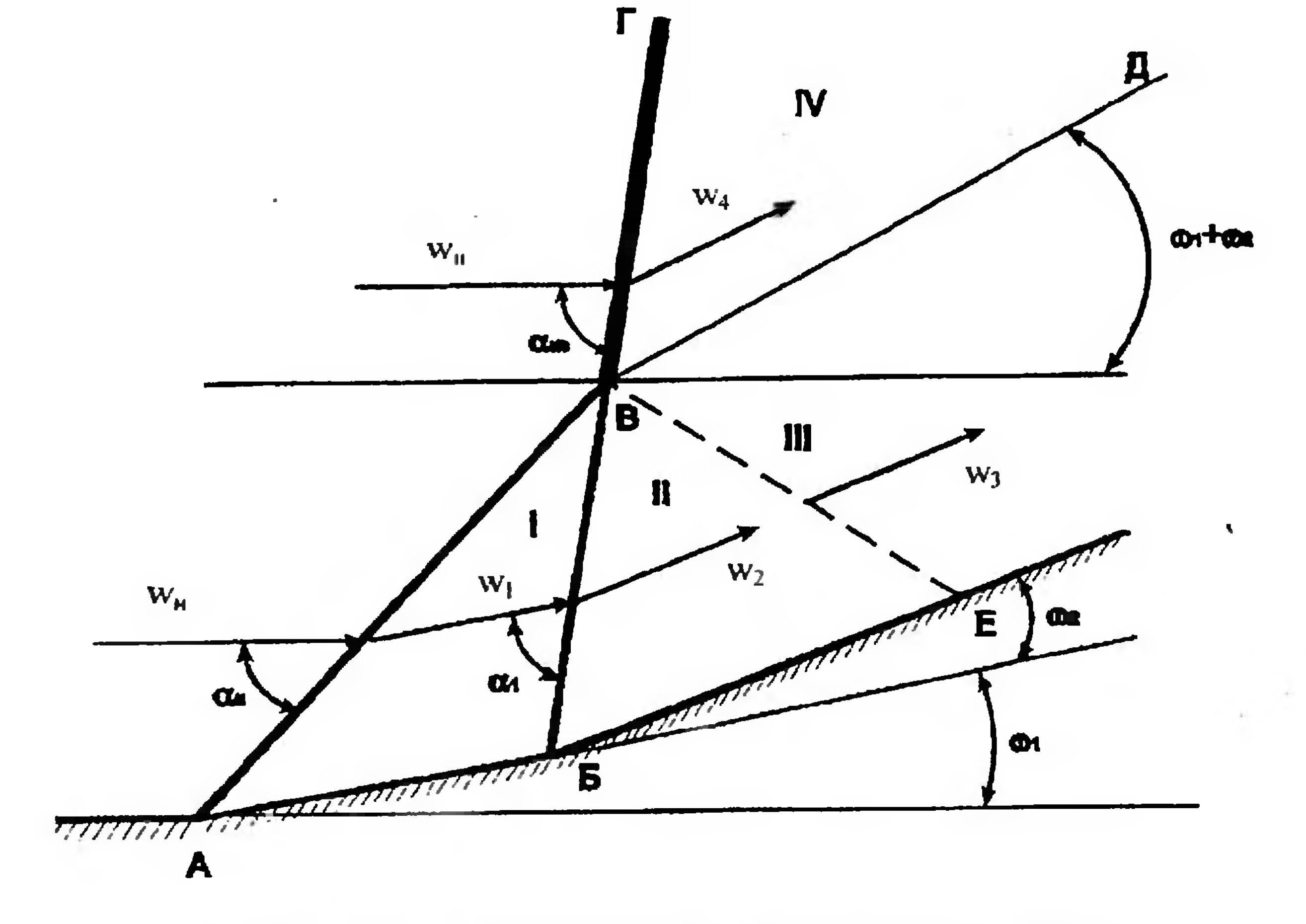


Рис.5.13. Пересечение скачков одного семейства

одного более сильного скачка *ВГ*. Для равновесия такой системы должны выполняться следующие условия:

1) равенство угла $\omega_1 + \omega_2$ поворота потока на сильном скачке *ВГ* суммарному углу поворота на скачках *АВ* и *БВ*;

2) равенство статических давлений в областях III и IV $p_3 = p_4$.

В общем случае выполнение этих условий достигается или за счет слабого отраженного скачка уплотнения *ВЕ* (при $p_2 < p_4$), или волны разрежения (при $p_2 > p_4$). Давление торможения в области III получается всегда больше, чем в области IV, т. е. $p_3^* > p_4^*$. Увеличение числа скачков при торможении в пределе может реализовать торможение в слабых волнах сжатия (характеристиках), т. е. изоэнтропически (без потерь давления торможения). Вследствие этого в данном случае интенсивность (изменение скорости) двух слабых скачков меньше одного сильного. В результате неравенства давлений торможения

p_3^* и p_4^* скорости потока в областях III и IV оказываются различными и поверхность *ВД* будет являться поверхностью тангенциального разрыва скоростей. В вязком газе вдоль поверхности тангенциального разрыва формируется вихревой слой смешения с плавным изменением скорости от w_3 до w_4. Процесс смешения является диссипативным процессом, приводящим к уменьшению (выравниванию) давлений торможения.

Другой случай пересечения косых скачков, относящихся к ***скачкам разного семейства*** (поворачивающих поток в разные стороны), показан на рис. 5.14.

Рис. 5.14. Пересечение скачков различных семейств

Отклонения стенок на углы ω_1 и ω_2 вызывают появление косых скачков A_1B и A_2B, пересекающихся в точке B. Поскольку углы ω_1 и ω_2 в общем случае не одинаковы, то направление векторов скоростей за скачками в зонах II и III неодинаковы по отношению к направлению исходного потока. Пересечение скачков в точке B порождает отраженные скачки BC_1 и BC_2. Устойчивость данной системы скачков обеспечивается параллельным направлением векторов скоростей за отраженными скачками, равенством статического давления параллельных потоков. Кроме того, углы β_1 и β_2 между фронтом отраженных

скачков и векторами скорости w_2 и w_3 за скачками не должны превышать некоторое предельное значение, определяемое максимально возможным значением угла поворота в косом скачке при данном значении числа М.

5.10.2. Отражение скачка от плоской стенки. Сверхзвуковой поток, движущийся параллельно стенке *ОБ*, образует на клине с углом ω косой скачок *АБ*. Поворачивая в скачке на угол ω, поток начинает натекать на стенку *ОБ*. В точке *Б* падения скачка возникает отраженный скачок *БВ*, в котором поток поворачивает тоже на угол ω и возвращается к первоначальному направлению (рис. 5.15). Скачки *АБ* и *БВ* принадлежат к различным семействам и могут быть рассчитаны с использованием диаграмм αω (рис. 5.15) в соответствии с алгоритмом, изложенным выше. Это случай так называемого ***регулярного отражения*** [11] скачка от плоской стенки.

При некоторых сочетаниях ω, $M_н$ и M_1 может оказаться такое малое M_2, для которого максимальный угол отклонения потока ω_{max} меньше ω, необходимого для придания потоку направления параллельно стенке. В этом случае возникает так на-

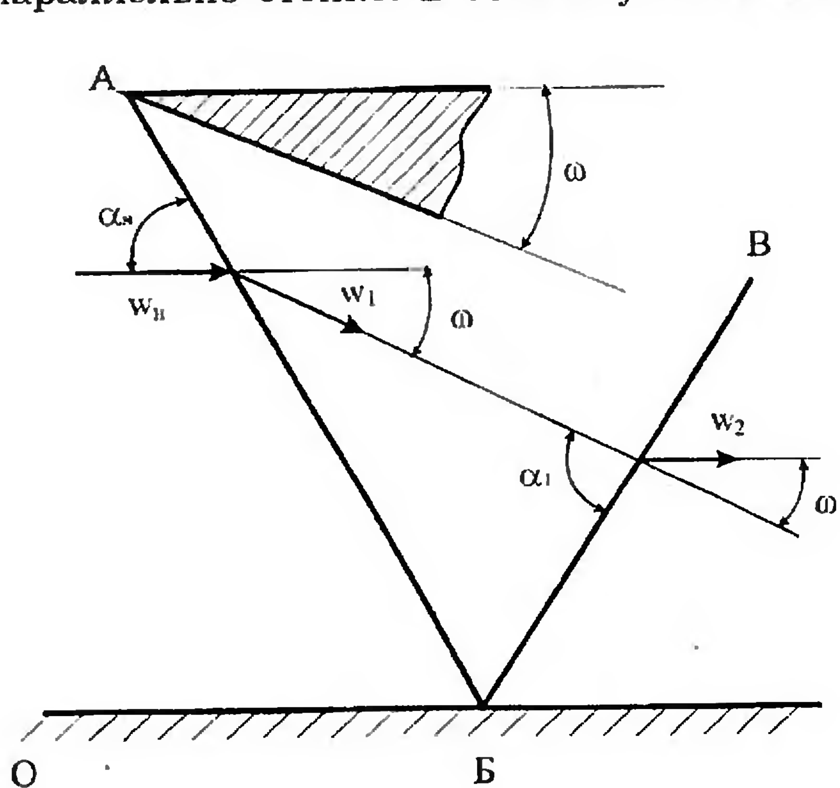


Рис. 5.15. Регулярное отражение косого скачка от плоской стенки

зываемое ***маховское*** отражение (по имени Э. Маха [11], впервые наблюдавшего это явление), рис. 5.16.

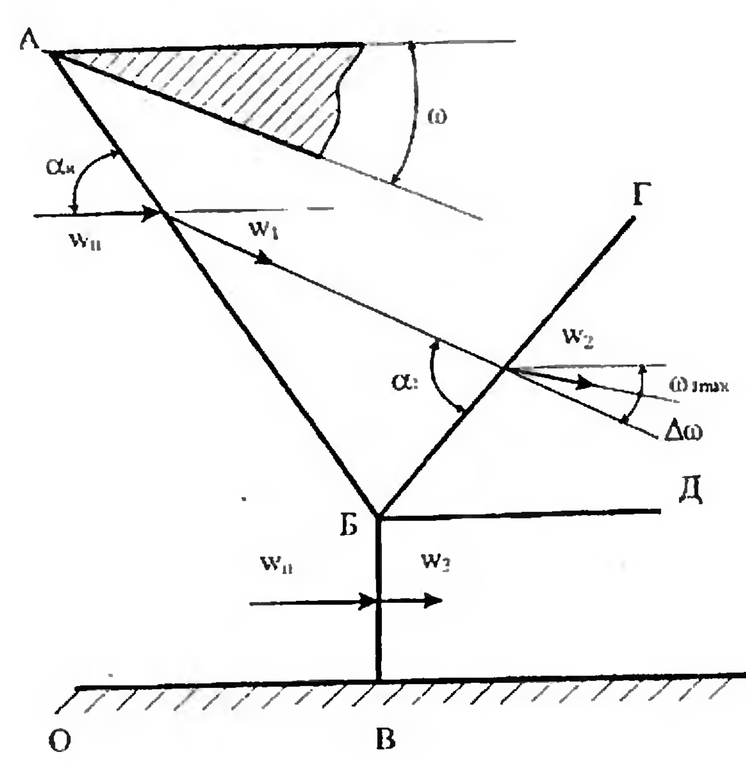


Рис. 5.16. Маховское отражение косого скачка от плоской стенки

Оно имеет вид *Y*-образного скачка с тройной точкой *Б*. Участок скачка *БВ* — это прямой (или близкий к нему) скачок уплотнения, при переходе через который поток становится дозвуковым (w_3). На косом скачке *БГ* поток поворачивает от стенки на угол $\omega_{max} < \omega$ и поэтому не параллелен стенке, но скорость ω_2 — сверхзвуковая. На линии *БД* имеет место тангенциальный разрыв скорости, который при течении реального газа локализуется образованием слоя смешения. Устойчивость системы обеспечивается равенством статического давления p_2 и p_3. Очевидно, что случай $p_2^* > p_3^*$ аналогичен случаю пересечения скачков одного семейства. Выравнивание направления скоростей происходит в криволинейных линиях тока. Расчет течения проводится с помощью $\alpha\omega$ диаграммы (рис. 5.16).

5.10.3. Отражение скачка от границы свободной струи. Взаимодействие скачка с границей свободной струи определяется условиями силового равновесия на жидкой границе, а именно

давление по обе стороны границы должно быть одинаково и равно давлению окружающей среды $p_н$ (рис. 5.17).

Косой скачок *АС* попадает в точке *С* на границу струи *FC*. При этом давление возрастает от $p = p_н$ в области II до $p_1 > p_н$ за скачком. Скачок отражается в виде центрированной волны разрежения *СДЕ* (пучка характеристик), в которой давление выравнивается до атмосферного. При этом поток отклоняется на угол $\omega + \delta$, где величина δ определяется разворотом потока (расширением) в пучке характеристик.

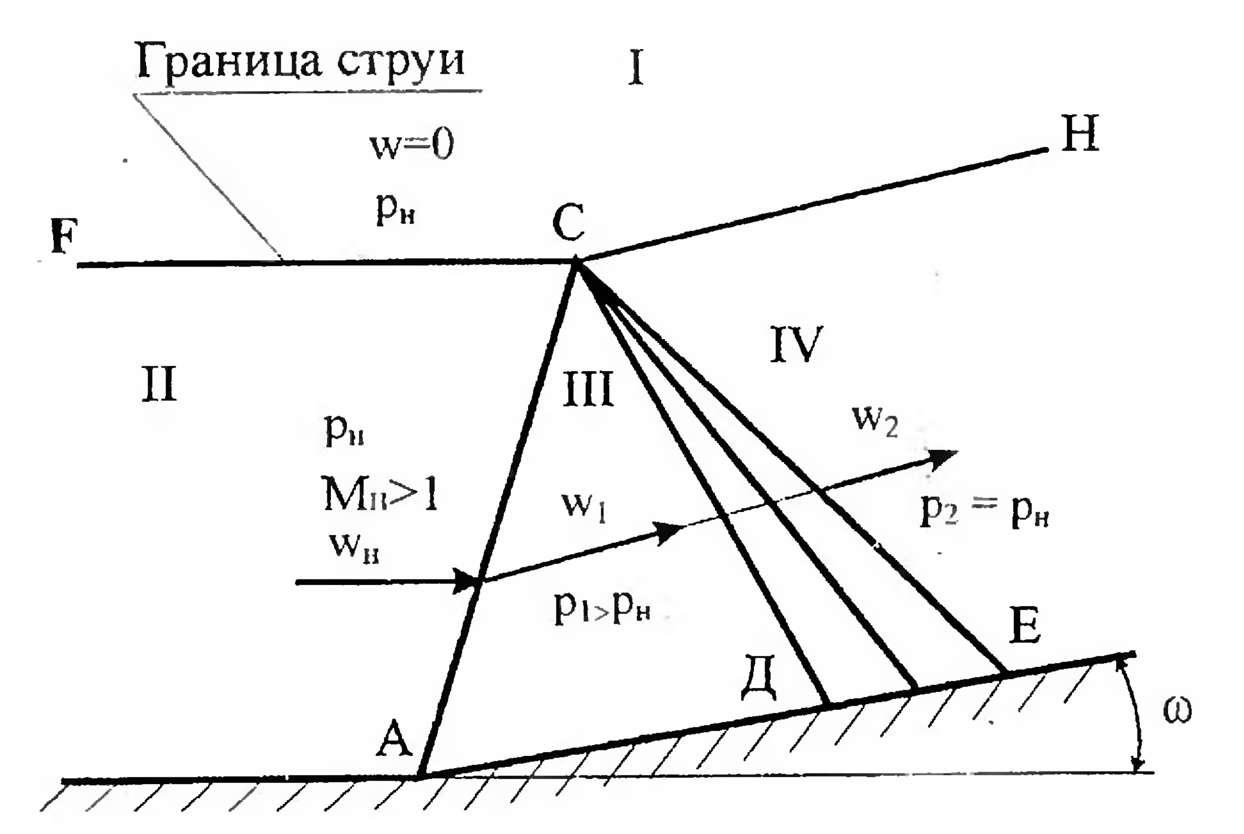


Рис. 5.17. Отражение косого скачка от границы струи

5.10.4. Взаимодействие скачка уплотнения с центрированной волной разрежения (с пучком характеристик, исходящих из одной точки). Такое взаимодействие получается при обтекании клина, образующая которого изломом переходит в поверхность, параллельную вектору скорости набегающего потока (рис. 5.18). Косой скачок *АН* взаимодействует с пучком характеристик центрированной волны разрежения из точки *С*. Это взаимодействие приводит к постоянному ослаблению скачка от точки *Н* до точки *К*, после которой скачок превращается в характеристику *КД*.

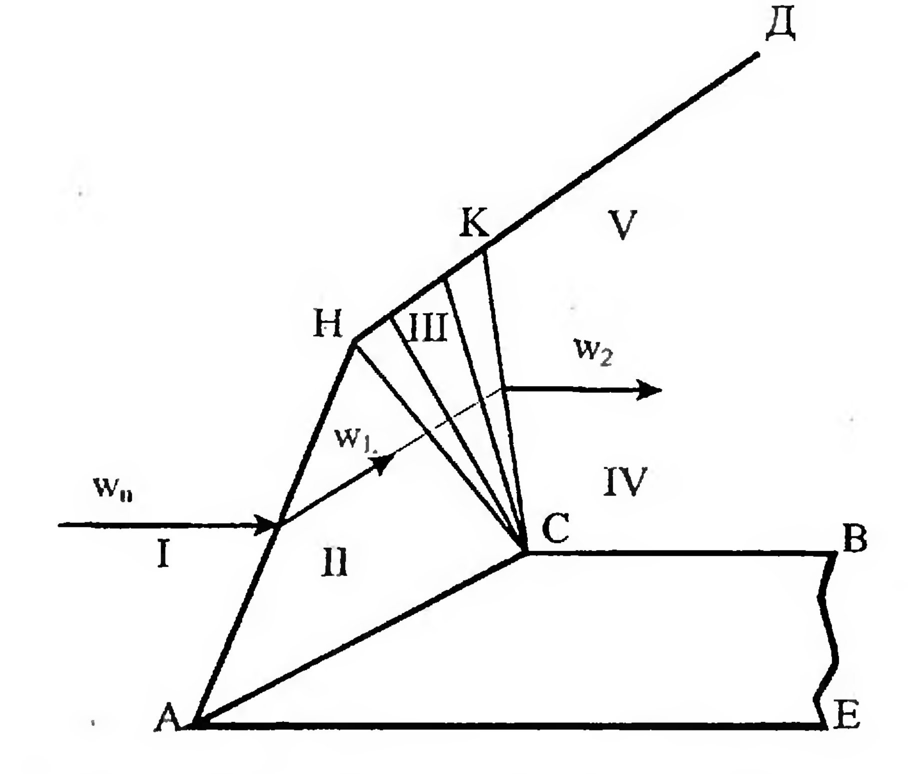


Рис. 5.18. Взаимодействие скачка с центрированной волной разрежения

Давление в области IV p_2 равняется атмосферному, однако давление торможения $p_2^* \equiv p_н^*$ в области V.

6. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА. УСКОРЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА

Как было показано в главе 5, изменение состояния сверхзвукового потока осуществляется в волновых структурах. В частности, торможение потока осуществляется в зависимости от интенсивности: либо в характеристиках сжатия, либо в скачках уплотнения. В качестве воздействия на сверхзвуковой поток рассматривалось отрицательное силовое или геометрическое воздействие, причем в большинстве случаев это воздействие было дискретным.

6.1. Течение Прандтля-Майера

Рассмотрим ускорение сверхзвукового потока, осуществляемое с помощью дискретного геометрического воздействия, на

примере обтекания полубесконечным сверхзвуковым потоком внешнего тупого угла [2]. Получающееся течение носит название течения ***Прандтля-Майера***; схема его представлена на рис. 6.1. Две полубесконечные стенки AC и CB образуют тупой

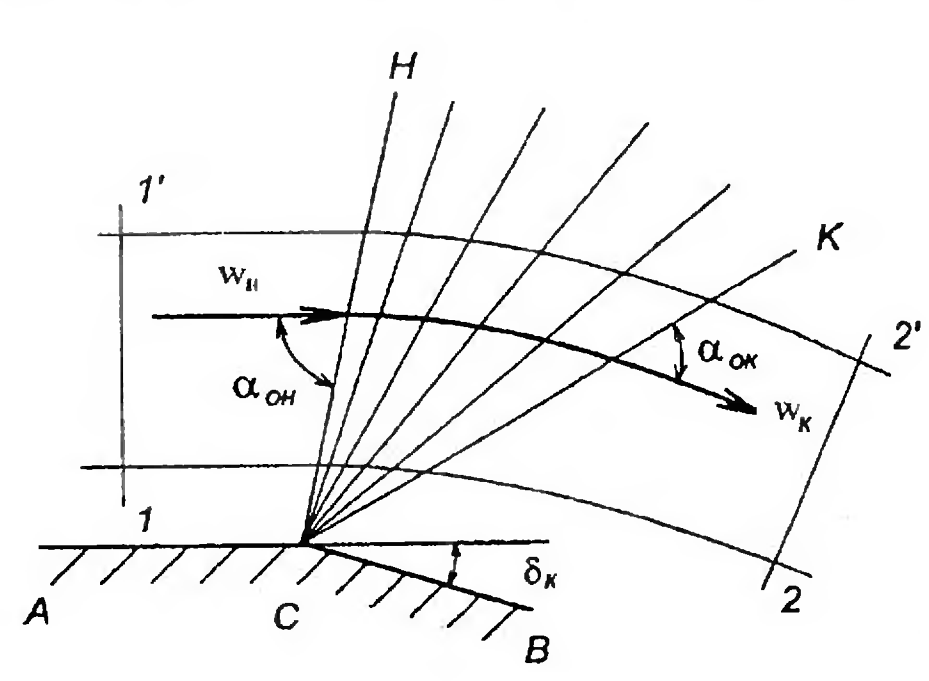


Рис. 6.1. Течение Прандтля-Майера

угол $ACB = 180^\circ + \delta$. Сверхзвуковой плоскопараллельный поток с равномерными полями параметров в сечении, перпендикулярном плоскости AC, течет энергетически изолированно вдоль стенки AC. Необходимо определить параметры потока при обтекании угла ACB.

6.2. Физическая картина течения

В соответствии с уравнениями закона обращения воздействия для геометрического воздействия в виде уравнения Гюгонио (4.98)

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}$$

при положительном геометрическом воздействии $dF > 0$ в сверхзвуковом потоке $\mathrm{M} > 1$ поток должен ускоряться, т. е. $dw > 0$. Вершина угла C является источником слабых возмущений — характеристик, которые будут реализовываться в виде центрированной волны разрежения, поскольку поток при уве-

личении скорости будет расширяться. В главе 5 было доказано, что волны разрежения в условиях энергоизолированности течения могут быть только слабыми и изоэнтропийными. Возможное образование пограничного слоя на обтекаемой поверхности не учитывается, и газ считается идеальным.

Выберем в качестве системы плоскую струйку, ограниченную линиями тока 1′–2′ и 1-2 и плоскими сечениями 1-1′ и 2-2′, нормальными к плоскостям АС и *СВ* (см. рис. 6.1). Первая характеристика *СН* располагается под углом $a_н = \arcsin \frac{1}{M_н}$ к вектору скорости невозмущенного потока $w_н$. Прямолинейность характеристики обеспечивается равномерностью поля потока, которая в области системы между сечением 1-1′ и характеристикой *СН* не изменяется.

Характеристика *СК* соответствует вектору скорости $w_к$ в конце процесса расширения в изоэнтропийном процессе и повороте потока на угол δ. Угол $\alpha_к$ между вектором скорости $w_к$ и характеристикой *СК* определяется из условия $a_к = \arcsin \frac{1}{M_к}$. Изменение параметров потока происходит только в пределах угла *НСК* в результате пересечения бесчисленного множества характеристик.

Рассмотренная физическая картина течения хорошо подтверждается опытными данными. Следует отметить, что течение является двумерным, и использование модели струйки потребует дополнительных соотношений для расчета течения. Аналогичная ситуация имела место в косом скачке уплотнения, однако малая протяженность скачка позволила воспользоваться условием сохранения площади сечения. Здесь таким дополнительным условием является теорема Томсона [2] об отсутствии в изоэнтропийном пространственном течении вихревого движения, в частности, о равенстве нулю циркуляции скорости Г по любому замкнутому контуру *l* в векторном поле скоростей:

$$\Gamma = \int \vec{W}\, d\vec{l}. \qquad (6.1)$$

6.3. Модель расчета течения Прандтля-Майера

Учитывая вращательный характер движения потока относительно возмущающей точки C, целесообразно использовать полярную систему координат r, φ с полюсом в точке C (рис. 6.2), при этом параметры вдоль радиуса-вектора не изменяются, так как он совпадает с характеристикой, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial r} = 0. \qquad (6.2)$$

Рис. 6.2. К расчету течения Прандтля-Майера

Тогда частные производные $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ можно заменить на обычные:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\varphi}. \qquad (6.3)$$

Условия энергоизолированности течения $dq_н = dl_{тех} = 0$ и изоэнтропийности $dS = 0$ определяют параметры торможения в сечении $22'$

$$p_2^* = p_1^*, \quad T_2^* = T_1^*, \quad \rho_2^* = \rho_1^* \qquad (6.4)$$

при заданных граничных условиях в сечении $11'$. Все остальные параметры в сечении $22'$ могут быть определены с помо-

щью газодинамических функций, если будет определена приведенная скорость $\lambda_2 = \lambda(\varphi_2)$:

$$p_2 = p_2^* \pi(\lambda_2), \quad T_2 = T_2^* \tau(\lambda_2), \quad \rho_2 = \rho_2^* \varepsilon(\lambda_2), \quad w_2 = a_{\text{кр}\,2} \lambda_2 . \tag{6.5}$$

Для получения зависимости

$$\lambda_2 = \lambda(\varphi) \tag{6.6}$$

используются следующие уравнения.

1. Соотношение между нормальной w_u (окружной), радиальной составляющей w_r и величиной скорости w

$$w^2 = w_u^2 + w_r^2 , \tag{6.7}$$

которое с учетом (6.4) и деления на $a_{\text{кр}}$ можно записать как

$$\lambda^2 = \lambda_u^2 + \lambda_r^2 . \tag{6.8}$$

2. Записанное с учетом свойства характеристики соотношение

$$w_u = a. \tag{6.9}$$

3. Уравнение сохранения энергии

$$i^* = \frac{k+1}{k-1}\frac{w_u^2}{2} + \frac{w_r^2}{2} = \frac{k+1}{k-1}\frac{a_{\text{кр}}}{2} = \text{const} . \tag{6.10}$$

4. Условие (6.1) отсутствия циркуляции скорости по замкнутому контуру *абвг* (см. рис. 6.2)

$$\Gamma_{абвг} = w_r\,dr + (w_u + dw_u)(r + dr)\,d\varphi - (w_r + dw_r)\,dr - w_u\,r\,d\varphi . \tag{6.11}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, с учетом (6.2) и (6.3) после сокращений получаем

$$\frac{dw_r}{d\varphi} = w_u \tag{6.12}$$

и, разделив в (6.12) на $a_{\text{кр}}$ правую и левую часть,

$$\frac{d\lambda_r}{d\varphi} = \lambda_u . \qquad (6.13)$$

Приведем к безразмерному виду (6.10), разделив правую часть на левую, а полученное выражение для λ_u заменим из (6.13). После преобразований получим

$$\frac{d\left(\frac{k+1}{k-1}\lambda_r\right)}{\sqrt{1-\frac{k+1}{k-1}\lambda_r^2}} = \frac{k+1}{k-1}\,d\varphi . \qquad (6.14)$$

Интегрирование (6.14) дает

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\sin\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} + C\right). \qquad (6.15)$$

Подставив полученное выражение в (6.13), найдем

$$\lambda_u = \cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\varphi + C\right). \qquad (6.16)$$

Тогда с учетом (6.15) и (6.16) из (6.8) определим искомую функцию $\lambda = \lambda(\varphi)$:

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\varphi + C\right). \qquad (6.17)$$

Используем в качестве граничного условия значение $\lambda_н = M_н = 1$, для которого угол $\alpha_{он} = 90^\circ$ ($\alpha_{он} = \arcsin 1/M_н$). При выбранном граничном условии эту характеристику удобно принять за начало отсчета координаты φ. Тогда из (6.17) при $\lambda_н = 1$ и $\varphi = 0$ следует, что $C = 0$, а окончательный вид искомой функции

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1}\sin^2\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\varphi\right). \qquad (6.18)$$

Соотношение между углами характеристики α_0, углом поворота характеристики φ и углом отклонения потока (обтекаемой

поверхности) δ могут быть получены из анализа рис. 6.3 для случая течения Прандтля-Майера при $\lambda_н = 1$.

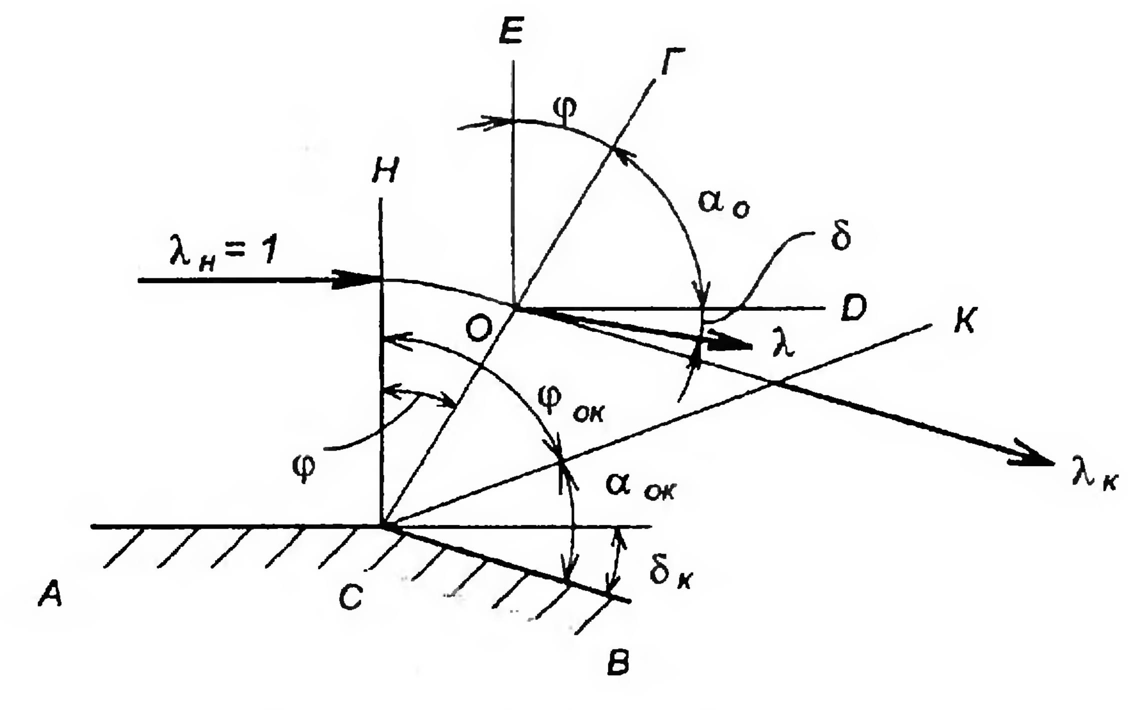


Рис. 6.3. Течение Прандтля-Майера при $\lambda_н = 1$

Для этого случая начальная характеристика *СН* перпендикулярна вектору скорости *W* и обтекаемой поверхности *АС*, так как $\alpha_{0н} = \arcsin 1/\mathrm{M}_н$. От этой характеристики отсчитывается по часовой стрелке координата φ. Конечная характеристика *СК*, соответствующая вектору скорости $w_к$ $(\lambda_к)$, после поворота на угол $\delta_к$ составляет угол $\alpha_{0к}$ с вектором скорости $w_к$ $(\lambda_к)$ и с обтекаемой поверхностью *СВ*.

Аналогичное построение выполнено в точке *О* для произвольной промежуточной характеристики *СГ*. Из рис. 6.3 следует, что

$$\delta + \frac{\pi}{2} = \varphi + \alpha_0 \,. \tag{6.19}$$

Добавляя формулу для

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{1}{\mathrm{M}} \,, \tag{6.20}$$

получаем систему уравнений (6.18), (6.19), (6.20), содержащую четыре параметра: λ, φ, α_0, δ. Она позволяет полностью рассчитать течение Прантдля-Майера при $\lambda_н = 1$, последовательно задавая значения φ и определяя по формулам (6.18), (6.20) и (6.19) значения λ (M), α_0 и δ соответственно. Увеличение скорости в течении Прандтля-Майера приводит к понижению давления, температуры и плотности вплоть до нуля при расширении в вакуум. При этом скорость достигает максимального значения: $w_{max} = \sqrt{2i^*}$, $\lambda^2_{max} = \dfrac{k+1}{k-1}$, $M_{max} = \infty$. Этим максимальным значениям соответствуют предельные значения углов поворота характеристики φ_{max} и потока δ_{max}, которые можно определить из (6.18) и (6.19), подставив туда значения λ_{max} и $\alpha_0 = 0$ (при $M = \infty$):

$$\varphi_{max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\frac{\pi}{2}; \tag{6.21}$$

$$\delta_{max} = \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1\right)\frac{\pi}{2}. \tag{6.22}$$

Если угол отклонения обтекаемой поверхности $\delta > \delta_{max}$, то возникает явление отрыва сверхзвукового потока. Поток в этом случае будет следовать вдоль линии, определяемой величиной δ_{max}, а не δ. Для воздуха с k = 1,4 значения $\varphi_{max} = 300^\circ$, а $\delta_{max} = 210^\circ$.

Для получения уравнения линий тока рассмотрим линию тока *авде* жидкой частицы в течении Прандтля-Майера (рис. 6.4). Выделим две характеристики CN и CR, отстоящие друг от друга на элементарный угол $d\varphi$ и включающие элемент линии тока δd. $C_\delta = Cf = r$ — радиус-вектор, $fd = dr$, дуга $\delta f = rd\varphi$. Треугольник δdf и треугольник скоростей $w_r w_u w$ подобны, что позволяет записать следующие выражения для тангенса угла β:

$$\text{tg}\,\beta = \frac{dr}{rd\varphi} \tag{6.23}$$

Рис. 6.4. К выводу уравнения линии тока в течении Прандля-Майера

— из треугольника δdf

и $$\operatorname{tg}\beta = \frac{w_r}{w_u} = \frac{\lambda_r}{\lambda_u} \qquad (6.24)$$

— из треугольника скоростей. Приравнивая (6.23) и (6.24), подставим в полученное соотношение значения λ_r и λ_u из (6.15) и (6.16), проведем разделение переменных и проинтегрируем в пределах от r_0 до r и от $\varphi = 0$ до φ.

Получим

$$r = \frac{r_0}{\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\,\varphi\right)\right]^{\frac{k+1}{k-1}}}, \qquad (6.25)$$

где r_0 — радиус-вектор данной линии тока на начальной характеристике, соответствующей М = 1.

Из (6.25) следует,что радиус-вектор линии тока увеличивается с ростом φ и δ тем больше, чем больше r_0. Это соответствует увеличению сечения, занимаемого потоком, и его ускорению в соответствии с уравнением обращения воздействия.

6.4. Расчет течения Прандтля-Майера

Течение Прандтля-Майера рассчитывается в зависимости от заданных граничных условий различными способами. Для упрощения расчетов составлена таблица (см. приложение 3), рассчитанная по формулам (6.17), (6.20), (6.19), (6.25) в зависимости от аргумента φ, изменяющегося в пределах от 0 до φ_{max}. Значения функций λ (M), α_0, δ, r/r_0, а также газодинамических функций $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$ записаны в вертикальных столбцах таблицы, которая заменяет проведение расчетов по вышеприведенным формулам.

6.4.1. Расчет течения при $\lambda_н = 1$. Для расчета течения может быть задан любой из параметров: $\delta_к$, $\lambda_к$, $\alpha_к$, r/r_0. Решение задачи находится в горизонтальном столбце таблицы по значению заданного параметра в вертикальном столбце таблицы.

6.4.2. Расчет течения при $\lambda_н > 1$. Необходимо предварительно найти положение нулевого значения аргумента φ, которое соответствует $\lambda = 1$. Поэтому решение задач подразделяется на три последовательно выполняемых этапа.

а) Решается "*фиктивная*" задача. Предполагается,что данное значение $\lambda > 1$ получено в течении Прандтля-Майера при обтекании внешнего тупого угла от $\lambda = 1$. Этому течению соответствуют некоторые значения угла поворота характеристики $\varphi_ф$ и поворота потока $\delta_ф$, называемые *фиктивными*. Их значения легко определяются в горизонтальной строке, которая соответствует заданному $\lambda_н$. Таким образом, определяется положение нулевого значения аргумента φ (и δ), от которого теперь можно вести отсчет. С этой целью от характеристики, соответствующей значению $\lambda_н$, необходимо отложить против часовой стрелки угол $\varphi_ф$. Образующая угла и будет искомой начальной характеристикой. Через точку начала координат необходимо провести перпендикулярно начальной характеристике фиктивную плоскость. Угол между фиктивной и исходной плоскостями составит угол $\delta_ф$.

б) Решается "суммарная" задача, т. е. находится решение задачи от $\lambda = 1$ до $\lambda_к$. В зависимости от заданного параметра (а это может быть $\varphi_к$, $\delta_к$, $\lambda_к$) в горизонтальной строке, содержащей значение суммарного параметра $\varphi_\Sigma = \varphi_к + \varphi_ф$ или $\delta_\Sigma = \delta_к + \delta_ф$, находим решение "суммарной" задачи.

в) Решается "*разностная*" задача. Решение находится как разница между решениями "суммарной" и "фиктивной" задач, например, если по $\lambda_к$ найдены φ_Σ и δ_Σ, то определяются действительные углы $\varphi_к = \varphi_\Sigma - \varphi_ф$ и $\delta_к = \delta_\Sigma - \delta_ф$.

Следует учитывать, что формулы для максимальных углов поворота в этом случае справедливы только для суммарных углов φ_Σ и δ_Σ.

Максимальные углы поворота сверхзвукового потока от первоначального направления при $\lambda_н > 1$ называются *предельными*. С ростом $\lambda_н$ значения предельных углов уменьшаются: $\varphi_{пред} = \varphi_{\Sigma\,max} - \varphi_ф$, $\delta_{пред} = \delta_{\Sigma\,max} - \delta_ф$.

6.5. О расчете обтекания сверхзвуковым потоком выпуклой стенки, содержащей несколько изломов

Обтекание выпуклой стенки, содержащей несколько последовательных изломов, можно рассчитать последовательно, применяя разработанный алгоритм, а обтекание выпуклой криволинейной стенки можно представить как обтекание ломаной с бесконечным числом граней. Каждая точка такой поверхности будет источником возмущения. (Более подробно см. [28].)

6.6. Отражение и пересечение характеристик

6.6.1. Отражение характеристики от плоской стенки. Пусть на плоскую стенку *АНБ* (рис. 6.5) падает характеристика разрежения *ОН*. Движущийся параллельно стенке *АНБ* поток со скоростью $M > 1$ должен отклониться от стенки на характеристике *ОН* на угол $d\delta$ и увеличить скорость до M_1. В результате в точке *Н* между новым направлением потока и стенкой обра-

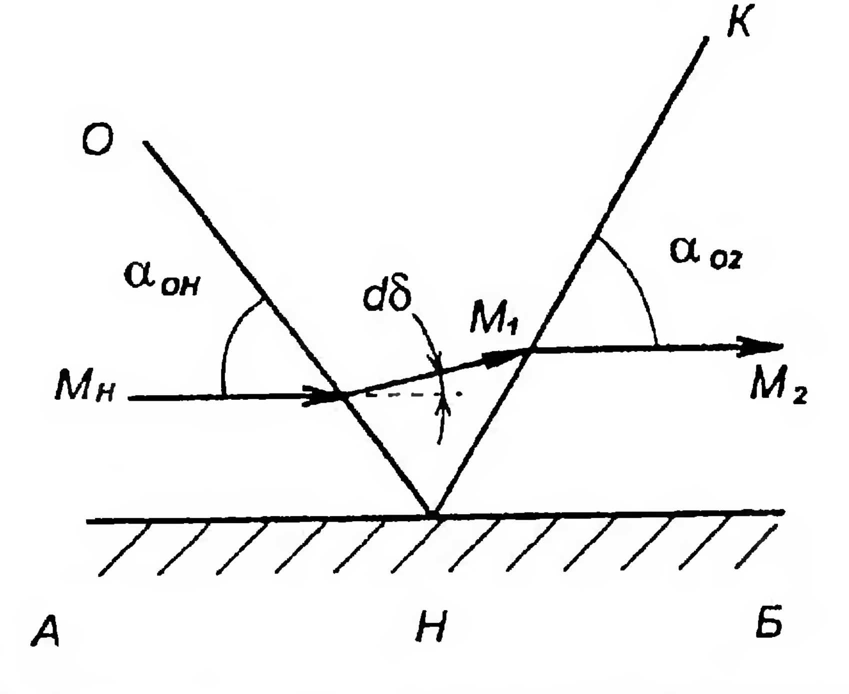


Рис. 6.5. Отражение характеристики разрежения от стенки

зуется внешний тупой угол $180^\circ + d\delta$. Поэтому в точке H возникает характеристика разрежения HK, на которой поток поворачивает на угол $d\delta$ по направлению к стенке и становится опять параллельным ей. При этом скорость увеличивается до M_2. Таким образом, *при отражении от стенки сохраняется тип характеристики возмущения*, увеличивается скорость $M_2 > M_н$ и $\alpha_{02} < \alpha_{0н}$.

При падении на стенку центрированной волны разрежения (рис. 6.6,*а*) вследствие увеличения скорости и уменьшения углов наклона характеристик отраженные характеристики расходятся веером. Для предотвращения отражения характеристик достаточно спрофилировать поверхность так, чтобы в месте падения каждой характеристики стенка отклонялась бы на угол поворота потока на характеристике (рис. 6.6,*б*).

В отличие от характеристик разрежения характеристики сжатия сходятся при отражении. Это может приводить к образованию ударных волн за счет сложения множества характеристик сжатия.

6.6.2. Отражение характеристики от границы свободной струи. Рассмотрим центрированную волну разрежения, образованную в точке излома поверхности AC движущимся вдоль

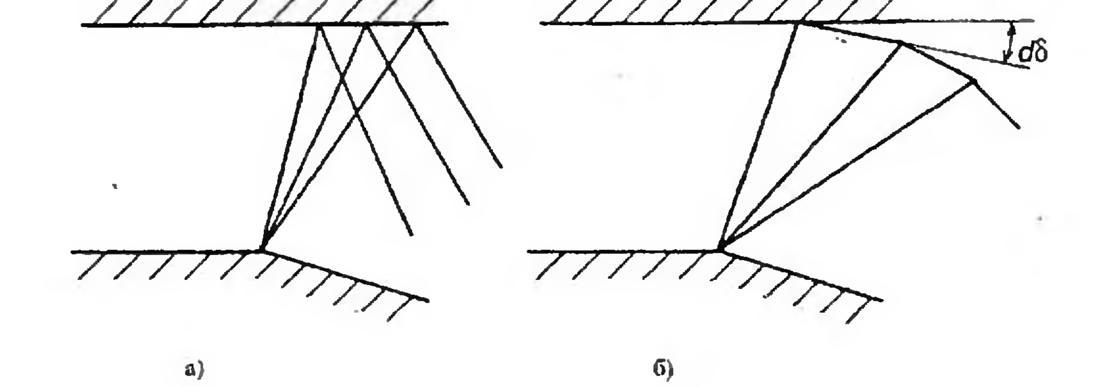


Рис. 6.6. Отражение центрированной волны разрежения от стенки

этой поверхности сверхзвуковым потоком $M_н > 1$ (рис. 6.7). Сверхзвуковой поток отделен поверхностью тангенциального разрыва скорости *ГН* от неподвижного газа М = 0. На характеристике СН поток увеличивает скорость и снижает давление до $p_1 < p_н$. Поскольку жидкая граница *ГН* не может удерживать

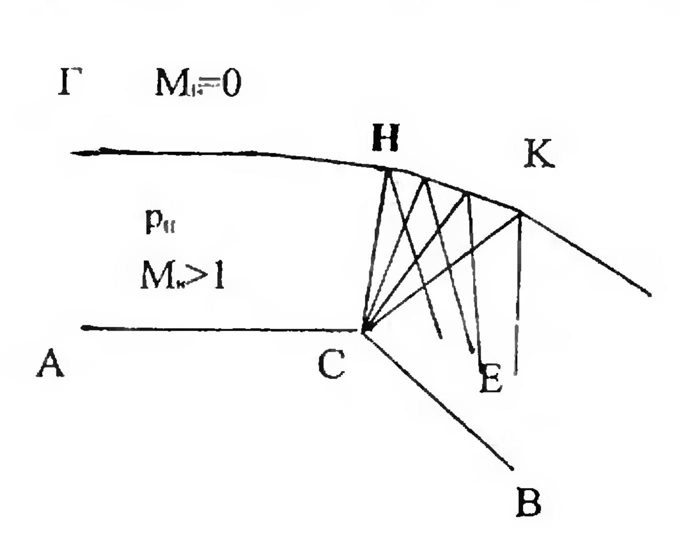


Рис. 6.7. Взаимодействие центрированной волны разрежения с границей свободной струи

перепад давления $\Delta p = p_н - p_1$, то в точке *Н* возникает отраженная характеристика сжатия *НЕ*, восстанавливающая давление до $p_н$. В результате давление по обе стороны жидкой границы будет одинаковым и равным $p_н$. Как было отмечено, характеристики сжатия сходятся и возможно образование скачка уплотнения. Таким образом, *при отражении от жидкой границы тип характеристики возмущения изменяется на противоположный.*

6.6.3. Пересечение характеристик. Рассмотрим (рис. 6.8) пересечение характеристик, образованных в плоском параллельном потоке вершинами внешних тупых углов C и C', обращенных друг к другу [2]. Поверхности $H'B'$ и НВ спрофилированы так, чтобы падающие на них характеристики не отражались.

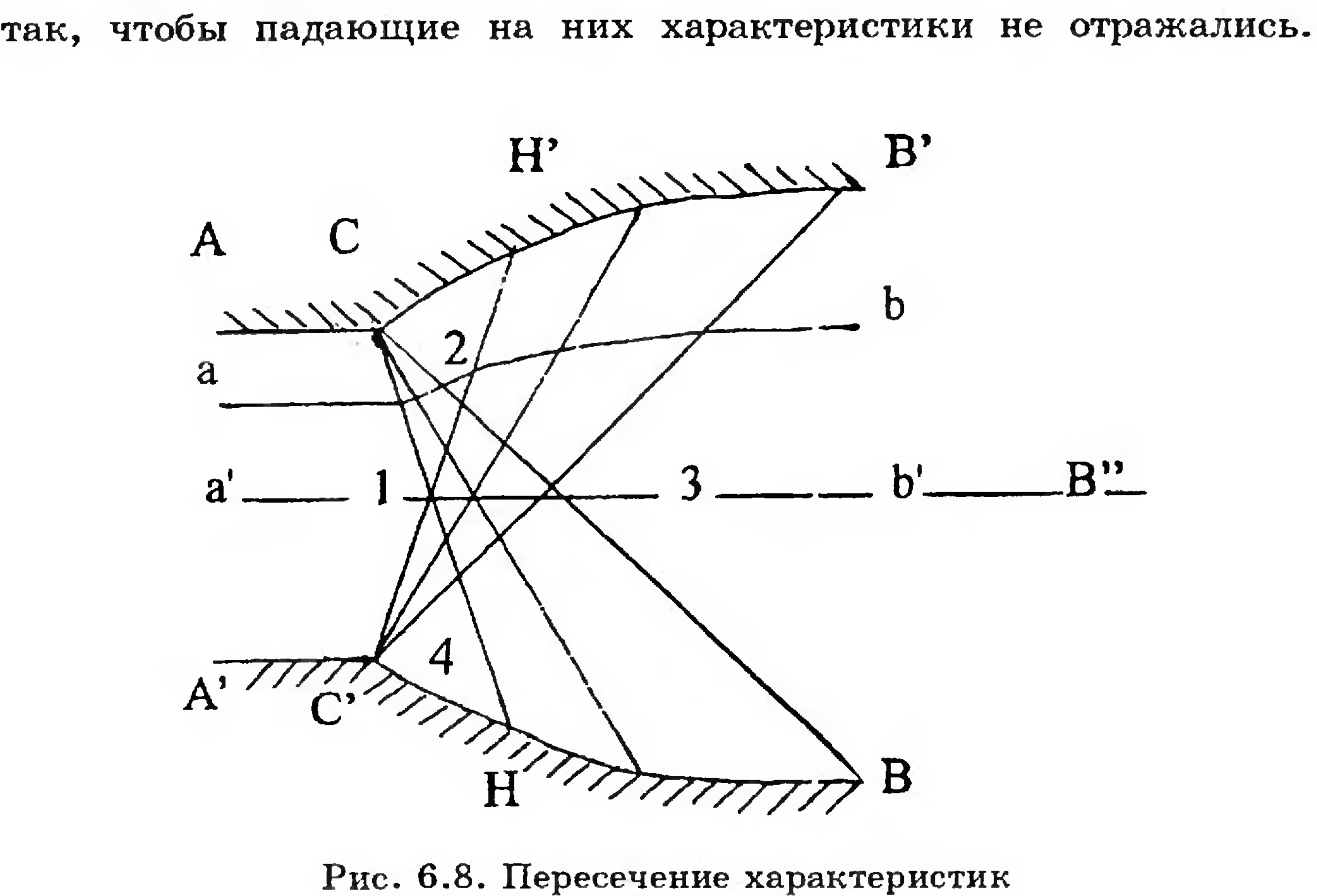


Рис. 6.8. Пересечение характеристик

Будем называть характеристики разрежения HCB характеристиками *первого семейства*, а характеристики $H'C'B'$ — характеристиками *второго семейства*. Характеристики первого и второго семейства пересекаются и взаимодействуют в области *1-2-3-4*. Сверхзвуковой поток вдоль линии тока ab сначала пересекает характеристики первого семейства, ускоряется и поворачивает против часовой стрелки, затем движется без изменений параллельно прямолинейной стенке CH' и потом ускоряется в характеристиках семейства $H'C'B'$, поворачивая по часовой стрелке до первоначального положения. Газ вдоль линии тока $a'b'$ последовательно ускоряется в характеристиках то одного, то другого семейства, чуть отклоняясь то в одну, то в другую сторону от оси. В области *1-2-3-4* характеристики искривляются, так как поток подходит к ним с различными скоростями. Особенностью рассмотренного течения является наличие однородно-

го течения сверхзвукового потока в области $3B'B''B$. Она называется *ромбом измерений* и обычно используется в аэродинамических трубах для исследования обтекания моделей сверхзвуковым потоком. С другой стороны, пример иллюстрирует *метод характеристик*, используемый для профилирования сверхзвуковых частей сопел Лаваля [11].

7. АНАЛИЗ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА В РЕАКТИВНОМ ДВИГАТЕЛЕ И ЕГО ЭЛЕМЕНТАХ

7.1. Двигатель

7.1.1. Назначение реактивного двигателя. Принцип реактивного движения. Перемещение летательных аппаратов тяжелее воздуха невозможно без движущей силы, которая в дальнейшем будет называться *силой тяги*, или просто *тягой*. Устройством, обеспечивающим получение тяги, является двигатель. Сила тяги двигателя создается на основе *принципа реактивного движения*, основанного на втором и третьем законах механики Ньютона. Третий закон гласит [31]: при взаимодействии двух тел сила, действующая на второе тело со стороны первого, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей на первое тело со стороны второго, или кратко: действие равно противодействию.

Одна из сил обычно называется силой реакции силы на действие другой. Примером может служить отдача орудия во время выстрела. Сила реакции создается в данном направлении (отдачи орудия) за счет увеличения скорости некоторой массы (пороховых газов и снаряда), движущейся в противоположном направлении. Здесь проявляется и действие второго закона, который формулируется так [32]: отнесенное к единице времени изменение количества движения системы (материальных точек) равно сумме сил, действующих на эту систему извне. Изменение количества движения системы (в данном случае орудия) за счет отбрасывания массы (пороховых газов и снаряда) приводит к появлению силы реакции, отбрасывающей орудие в направлении, противоположном направлению полета снаряда. Сила реакции, действующая на орудие, равна и противоположна силе, ускоряющей пороховые газы и снаряд. Таким образом, сила,в

частности сила тяги двигателя, может быть создана только при изменении количества движения системы за счет реакции отбрасывания массы, в качестве которой может быть использовано рабочее тело двигателя.

Различают двигатели *прямой реакции*, когда сила тяги создается непосредственно за счет реакции потока газа, вытекающего из двигателя, и двигатели *непрямой реакции*, когда сила тяги создается винтом. Тяга винта также создается за счет реакции больших масс воздуха, отбрасываемых винтом.

Двигатели прямой реакции называют обычно *реактивными двигателями*. Среди них выделяют два типа: не использующие рабочее тело окружающей среды (воздух, вода) для организации рабочего процесса и создания тяги (ракетные двигатели) и использующие рабочее тело окружающей среды (воздух, вода) для организации рабочего процесса и создания тяги. Такие двигатели называют реактивными, добавляя к названию в зависимости от используемой среды еще одно слово:

— *воздушно-реактивные двигатели* (ВРД), использующие воздух;

— *гидрореактивные двигатели* (ГРД), использующие воду.

Использование массы окружающей среды ограничивает применение двигателя рамками этой среды, однако позволяет иметь наилучшую экономичность среди реактивных двигателей.

7.1.2. Физика образования тяги. Необходимые условия получения тяги. Рассмотрим образование тяги в воздушно-реактивном двигателе, т. е. в двигателе, использующем воздух для организации рабочего процесса. Образование силы тяги происходит за счет отбрасывания массы газообразного рабочего тела с высокой скоростью $w_с$ в виде струи, истекающей из двигателя. Для получения такой струи в двигателе используется секундная масса воздуха $G_в$, входящая в двигатель со скоростью летательного аппарата $w_н$. В первом приближении можно полагать, что масса входящего воздуха $G_в$ и масса истекающей струи одинаковы. Тогда для получения силы тяги P в соответствии с уравнением количества движения имеем

$$P = G\,(w_с - w_н). \qquad (7.1)$$

Скорость на выходе из двигателя $w_с$ должна быть больше скорости на входе в двигатель $w_н$ (в ракетном двигателе достаточно получить любую скорость истечения), т. е.

$$w_с > w_н \,. \tag{7.2}$$

Увеличение скорости $w_с$ может быть получено за счет подвода энергии — например, сгорающего топлива. Для подвода тепловой энергии и превращения ее в работу, необходимую для увеличения кинетической энергии рабочего тела в истекающей струе, необходима тепловая машина.

На рис. 7.1,*а* показан цикл простейшего (бескомпрессорного) ВРД-двигателя в PV-координатах. Процесс Н-*1* соответствует сжатию рабочего тела от параметров окружающей среды (точка Н); процесс *1*-*2* — подвод тепла; процесс *2*-С — совершение работы расширения газа; точка *С* соответствует условиям на выходе из двигателя. В процессе *2*-С энергия рабочего тела, полу-

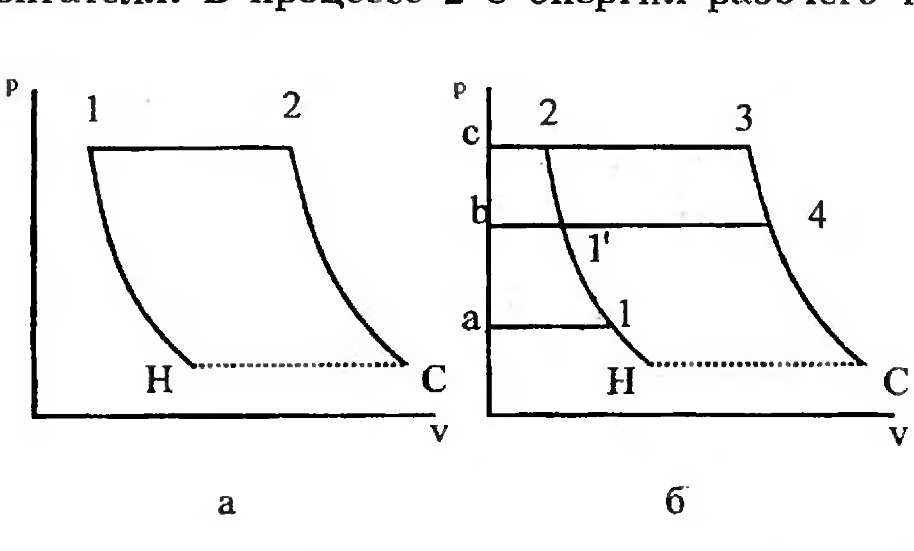


Рис. 7.1. Цикл бескомпрессорного воздушно-реактивного двигателя

ченная в процессах Н-*1*-*2*, частично превращается в кинетическую энергию рабочего тела на выходе из двигателя: $E_k = \dfrac{Gw_с^2}{2}$.

Процесс С-Н условно замыкает цикл и соответствует выравниванию параметров струи, истекающей из двигателя, с параметрами окружающей среды. Цикл показывает работу двигателя как тепловой машины, работе цикла соответствует площадь Н-*1*-*2*-С-Н. Для того чтобы работа цикла была положительна (отлична от нуля), обязательно наличие процессов сжатия и под-

вода тепла. Отсутствие хотя бы одного из них не позволит получить необходимую энергию в точке *2* (работа цикла будет равна нулю). На рис. 7.2 показано изменение некоторых параметров по тракту двигателя, в соответствии с циклом на рис. 7.1,*а*. Это *e* — полная удельная энергия; $l_{\text{полезн}}^{\text{max}}$ — удельная работоспособность, или эксергия; *w* — скорость; *p* — давление рабочего тела. Эти графики показывают, каким образом решается главная задача — увеличение скорости рабочего тела и получение высокоскоростной струи, истекающей из двигателя. Без наличия перепада давления на участке *2*-С (а оно может быть получено только предварительным сжатием) и подвода энергии в виде тепла на участке *1*-*2* невозможно реализовать получение тяги двигателя.

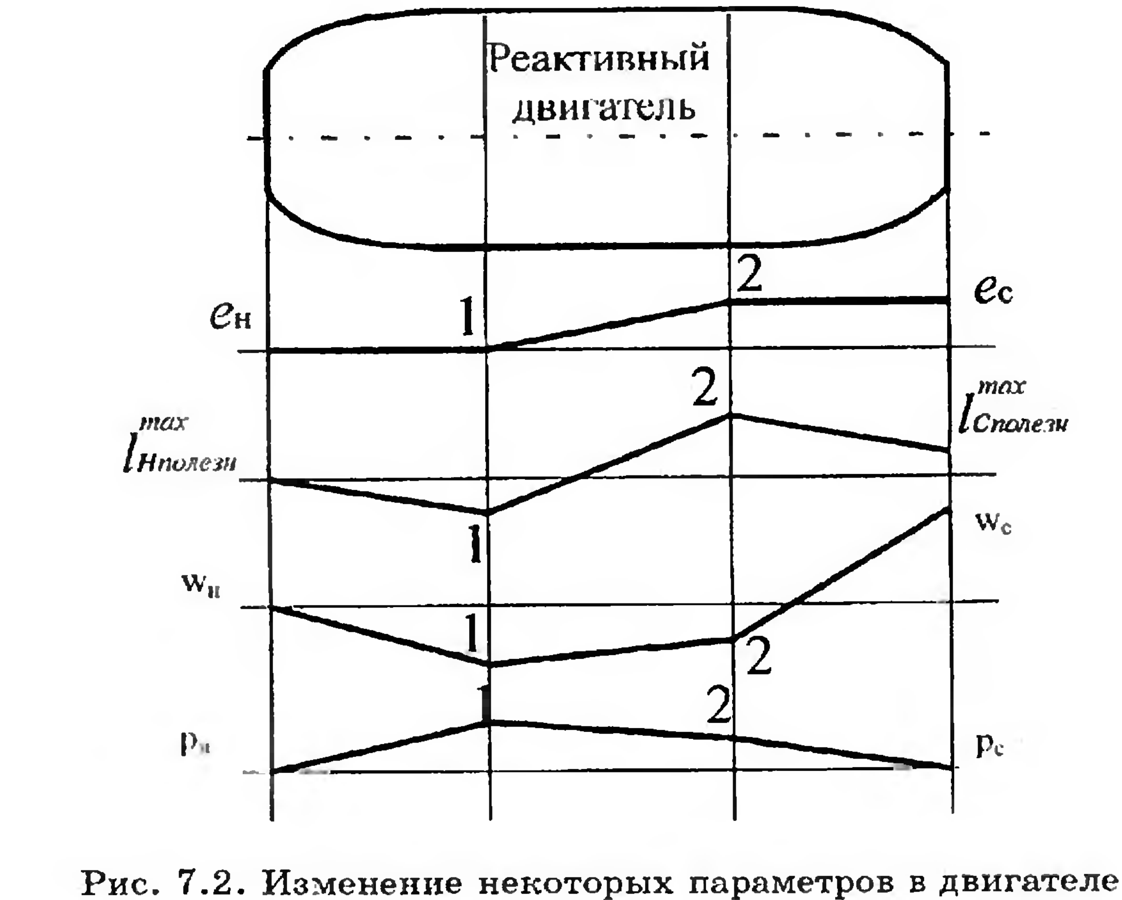


Рис. 7.2. Изменение некоторых параметров в двигателе

7.1.3. Основные элементы двигателя и их назначение. Функционально двигатель можно разделить на два устройства:

1) *генератор рабочего тела*, назначение которого — получить рабочее тело с заданной работоспособностью (эксергией) (процессы Н-*1*-*2* на рис. 7.1);

2) *движитель*, назначение которого — преобразовать эксергию (энергию) рабочего тела, полученную в генераторе, в работу силы тяги (процесс 2-С на рис. 7.1).

В качестве движителей в современных реактивных двигателях используются *сопло* и *винт*.

Состав генератора зависит от типа двигателя, но обязательно должен содержать устройство для сжатия рабочего тела — *диффузор* или *компрессор* или и диффузор, и компрессор — и для подвода энергии в форме тепла — *камеру сгорания*. Если устройство сжатия снабжено компрессором, то для его привода генератор снабжается *турбиной*. Такие двигатели называют *газотурбинными*. Цикл газотурбинного двигателя показан на рис. 7.1,*б*. Процесс Н-*1* соответствует сжатию в диффузоре; *1-2* — сжатию в компрессоре; *2-3* — подводу энергии (тепла) в камере сгорания; *3-4* — расширению на турбине, служащей для привода компрессора. Работа, необходимая для сжатия рабочего тела (воздуха) в компрессоре и равная $\int_1^2 v\,dp$, на рис. 7.1,*б* соответствует площади А-С-*2-1*.Работа расширения на турбине и равная $\int_3^4 v\,dp$ соответствует площади В-С-*3-4*. Отмеченные площади А-С-2-1 и В-С-3-4 должны равняться между собой. Тогда энергия рабочего тела на выходе из генератора будет характеризоваться точкой *4*, а работа цикла — площадью Н-1′-4-С. Эта энергия или работа используется в движителе (например, процесс 4-С расширения газа в сопле или процесс 4-С расширения газа на турбине, вращающей винт).

7.1.4. Определение силы тяги. Процесс образования движущей силы — силы тяги определяется взаимодействием системы двигателя или движителя с окружающей средой. Это взаимодействие физически проявляется как давление и напряжение трения, действующие как со стороны рабочего тела, протекающего внутри двигателя,так и со стороны окружающей среды. Равнодействующая этих сил, просуммированных по всей поверхности, и определяет силу тяги. При этом оговариваются граничные условия, при которых рассматривается тяга. В зависимости от граничных условий получаются разные как по вели-

чине, так и смыслу силы. Для реактивной тяги (ОСТ 100192-75 [2]) установлено следующее определение: это "результирующая всех газодинамических сил (давления и трения), приложенных к внутренней и наружной поверхностям двигателя в предположении, что внешнее обтекание двигателя идеальное".

7.1.5. Расчет реактивной силы на основе уравнения количества движения. Вычисление силы тяги путем непосредственного суммирования сил давления по рабочим поверхностям двигателя является неудобным и сложным. Применим для расчета силы тяги уравнение количества движения (7.1), которое позволяет определить силу тяги двигателя без анализа внутренних процессов, только по состоянию потока на границах системы.

Двигатель в потоке газа вызывает возмущение в виде деформации профилей скорости и давления. На рис. 7.3 показаны в сечении *а* невозмущенные профили скорости $w_н$ и давления $p_н$, профили в сечении *б* непосредственно перед двигателем и *в* за двигателем и профили в сечении *г* вдали за двигателем. Профили соответствуют двигателю, помещенному в дозвуковой поток, причем использован принцип обращения движения, когда дви-

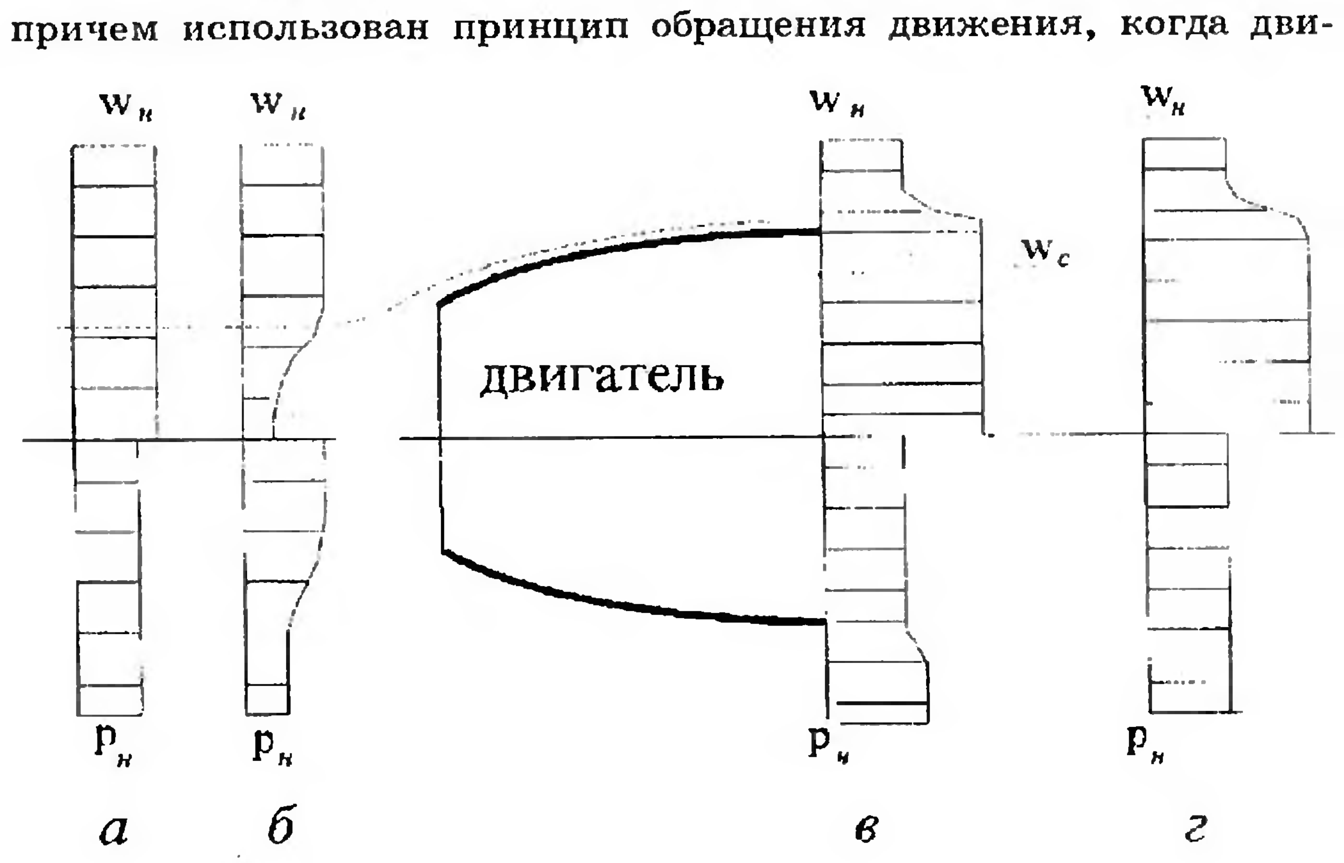


Рис. 7.3. Картина распределения давления и скорости при реальном обтекании

гатель рассматривается как неподвижный и обтекаемый внешним потоком.

Условия идеального внешнего обтекания соответствуют отсутствию влияния двигателя как источника возмущений на обтекающий его поток. Поэтому выберем в качестве газодинамической системы (рис. 7.4) цилиндр *11CC*, соосный с двигателем, образующие которого *1-C* расположены на достаточном удалении от двигателя как источника возмущения, параметры в торцевых сечениях *1-1* равномерны и равны параметрам окружающей среды, а в торцевом сечении *C-C* равномерны на участках *C-b* и равны параметрам в сечении *1-1*. На участке $C_1–C_1$ параметры также равномерны, но значения давления и скорости со-

Рис. 7.4. К выводу формулы силы тяги

ответствуют параметрам на выходе сопла двигателя p_{c} и w_{c}. Площадь потока на входе в двигатель соответствует входной площади диффузора F_1, а площадь потока на выходе — площади выходного сечения сопла F_{c}. В выбранной системе выделим две подсистемы: одну, соответствующую внутреннему обтеканию двигателя $1_1 1_1 C_1 C_1$, и вторую — соответствующую внешнему обтеканию двигателя 1*abC*. Обе подсистемы показаны на

рис. 7.4 пунктиром. Силой тяги P будет сила, с которой газ, обтекающий двигатель внутри и вовне, действует на систему, т.е.

$$\vec{P} = \vec{P}_{вн} + \vec{P}_{нар}, \quad (7.3)$$

где индексы: вн — внутренняя, нар — наружная.

Нормальные к оси двигателя силы внешнего давления, действующие на внешнюю подсистему,взаимно уравновешиваются, касательные напряжения отсутствуют (обтекание идеально), и нет обмена количеством движения через поверхность образующих. Поскольку давление на торцевых поверхностях 1a и Cb одинаково и равно $p_н$, то при выборе $F >> F_c$ можно полагать, что количество движения во внешней подсистеме 1abC не изменяется.

Запишем уравнения количества движения для каждой подсистемы в проекции на ось, совпадающую с осью двигателя, причем за положительное направление оси принимается направление вектора скорости набегающего потока.

Для внешней подсистемы с учетом $F >> F_c$

$$-\tilde{P}_{нар} + p_н (F - F_1) - p_н (F - F_c) = 0, \quad (7.4)$$

где $\tilde{P}_{нар}$ — сила, с которой окружающая среда действует на наружную подсистему,

$$\tilde{P}_{нар} = -\vec{P}_{нар}. \quad (7.5)$$

Для внутренней подсистемы

$$\tilde{P}_{вн} + p_н F_н - p_c F_c = (G_в + G_т)\, w_c - G_в\, w_н, \quad (7.6)$$

где $\tilde{P}_{вн}$ — сила, с которой окружающая среда действует на внутреннюю подсистему,

$$\tilde{P}_{вн} = -\vec{P}_{вн}; \quad (7.7)$$

$$G_в = \rho_н\, w_н\, F_1 \ [кг/с] \quad (7.8)$$

— расход воздуха через двигатель; $G_т$ — расход топлива.

Складывая выражения (7.4) и (7.6) и заменяя в полученном выражении $\tilde{P}_{нар}$ и $\tilde{P}_{вн}$ на $-\vec{P}_{нар}$ и $-\vec{P}_{вн}$, получим выражение для силы тяги:

$$P = -\left[(G_в + G_т)\, w_с - G_в\, w_н + (p_с - p_н)\, F_с\right]. \qquad (7.9)$$

Знак "–" означает, что сила направлена противоположно вектору скорости невозмущенного потока $w_н$, т. е. в направлении скорости полета. Такое направление силы тяги считается положительным. Поэтому знак "-" в дальнейшем опускается.

7.1.6. Формулы силы тяги для некоторых частных случаев. *Сила тяги ВРД на расчетном режиме*, которому соответствует условие $p_с = p_н$,

$$P = G_в\,(w_с - w_н) + G_т\, w_с. \qquad (7.10)$$

Сила тяги ВРД на старте, $w_н = 0$,

$$P = (G_в + G_т)\, w_с + (p_с - p_н)\, F_с. \qquad (7.11)$$

Так как для ВРД расход топлива $G_т \ll G_в$, то приближенно тяга может быть определена по формуле

$$P = G_в\,(w_с - w_н) + (p_с - p_н)\, F_с. \qquad (7.12)$$

Сила тяги ракетных двигателей, не использующих окружающую среду для получения рабочего тела,

$$P = G w_с + (p_с - p_н)\, F_с, \qquad (7.13)$$

где G — массовый расход рабочего тела, истекающий из сопла двигателя.

Сила тяги идет на совершение работы,связанной с преодолением сопротивления среды и инерции летательного аппарата на участках разгона и торможения (при реверсе тяги) ЛА. Внешнее сопротивление силовой установки определяется ее расположением на летательном аппарате. Сила тяги с учетом внешнего сопротивления называется *эффективной тягой.*

7.1.7. О месте приложения реактивной силы. Сила тяги есть результирующая сил давления и трения, действующих на все поверхности двигателя. Рассмотрим схему простейшего прямоточного двигателя (рис. 7.5), состоящего из диффузора Н-1, камеры сгорания 1-2 и сопла 2-С. Камеру в первом приближении можно считать цилиндрической. Будем учитывать только дей-

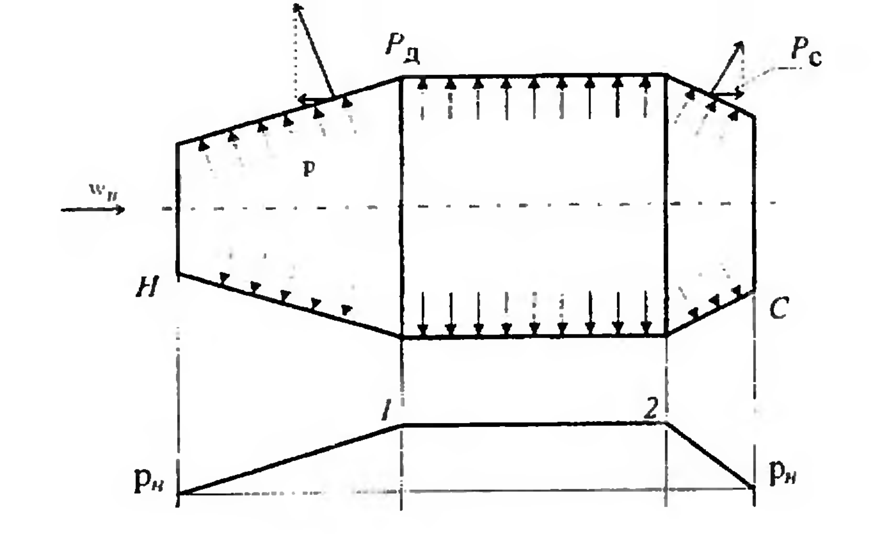


Рис. 7.5. О месте приложения силы тяги

ствие сил статического давления внутри двигателя. Силы, действующие на поверхности камеры,уравновешены и не дают составляющей вдоль оси двигателя. Сила давления на диффузор дает составляющую $P_д$ в направлении полета,а сила давления на сопло — составляющую $P_с$ в противоположном направлении. Площадь сопла $F_с$ больше $F_н$ площади входа в диффузор, так как в сопле газ подогрет. На расчетном режиме $p_с = p_н$, поэтому при одинаковом давлении на сопло и диффузор сила $P_д$, действующая на диффузор, оказывается больше силы, действующей на сопло $P_с$, т. е. $P_д > P_с$. Таким образом, сила тяги приложена ко всем элементам двигателя.

7.2. Сопло

7.2.1. Назначение сопла. Сопло — это устройство, служащее для преобразования внутренней и потенциальной энергии (вместе составляющих энтальпию потока) в кинетическую, т. е. ускорения потока. В соответствии с уравнением обращения воздействий (4.97)

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2}\,dq_{н} - \frac{1}{a^2}\,dl_{тех} - \frac{k}{a^2}\,dl_{тр} -$$

$$-\left[\frac{T_{м}}{T} + k\mathrm{M}^2\left(1 - \frac{w_{м}}{w}\right) + \frac{k-1}{2}\,\mathrm{M}^2\left(1 - \left(\frac{w^2_{возд}}{w^2}\right)\right)\right]\frac{dG}{G}\,.$$

Ускорение потока может быть получено за счет любого из воздействий: силового или геометрического dF, энергетического $dq_{н}$, механического $dl_{тех}$, трения $dl_{тр}$ и расходного dG. На практике наибольшее распространение получило геометрическое воздействие.

7.2.2. Геометрическое сопло. Будем называть ***геометрическим соплом*** (или просто соплом) канал переменного сечения, обеспечивающий непрерывное ускорение газового потока за счет преобразования внутренней энергии и потенциальной энергии давления в кинетическую путем только геометрического воздействия.

Рассмотрим основы теории геометрического сопла при следующих допущениях:

1) течение одномерное, стационарное; 2) ось сопла прямолинейна; 3) рабочее тело — совершенный идеальный газ, т. е. C_p, k, R являются константами, а коэффициент вязкости $\mu = 0$; 4) течение в сопле энергетически изолированное, стенки адиабатические; 5) релаксационные процессы отсутствуют.

7.2.3. Анализ процесса в геометрическом сопле. Сделанные выше допущения позволяют воспользоваться простейшей моделью элементарной струйки в газодинамической форме (см. разд. 4.6.2). Уравнение обращения воздействия для рассматриваемого случая имеет вид уравнения Гюгонию (4.98):

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}.$$

Сопла устанавливаются за камерой сгорания или за турбиной, где обеспечивается дозвуковая скорость потока. Исключение составляют только гиперзвуковые прямоточные реактивные двигатели, где скорость на выходе из камеры сгорания может быть сверхзвуковой. Параметры на входе в сопло будем обозначать индексом 0, а на выходе с. Тогда, в соответствии с уравнением Гюгонио, в зависимости от граничных условий геометрическое сопло может иметь форму как сужающегося канала (при $\mathrm{M}_0 < 1$ и $\mathrm{M}_с \le 1$), так и расширяющегося канала (при $\mathrm{M}_0 > 1$ и $\mathrm{M}_с > 1$) или сужающе-расширяющегося (при $\mathrm{M}_0 < 1$ и $\mathrm{M}_с > 1$). Профиль сужающе-расширяющегося канала, носящий название *сопло Лаваля*, показан на рис. 7.6. Для анализа в ка-

честве газодинамической системы примем область потока, заключенную внутри сопла. На рис. 7.6 она показана пунктиром. На основе энергоизолированности системы $dq_{\text{нар}} = dl_{\text{тех}} = 0$ имеем из уравнения энергии $T_0^* = T_c^*$. На основе идеальности совершенного газа и его энергоизолированности из уравнения изменения давления торможения (4.100) имеем $\frac{dp^*}{p^*} = 0$ и $p_0^* = p_c^*$, т. е. процесс в системе изоэнтропийный.

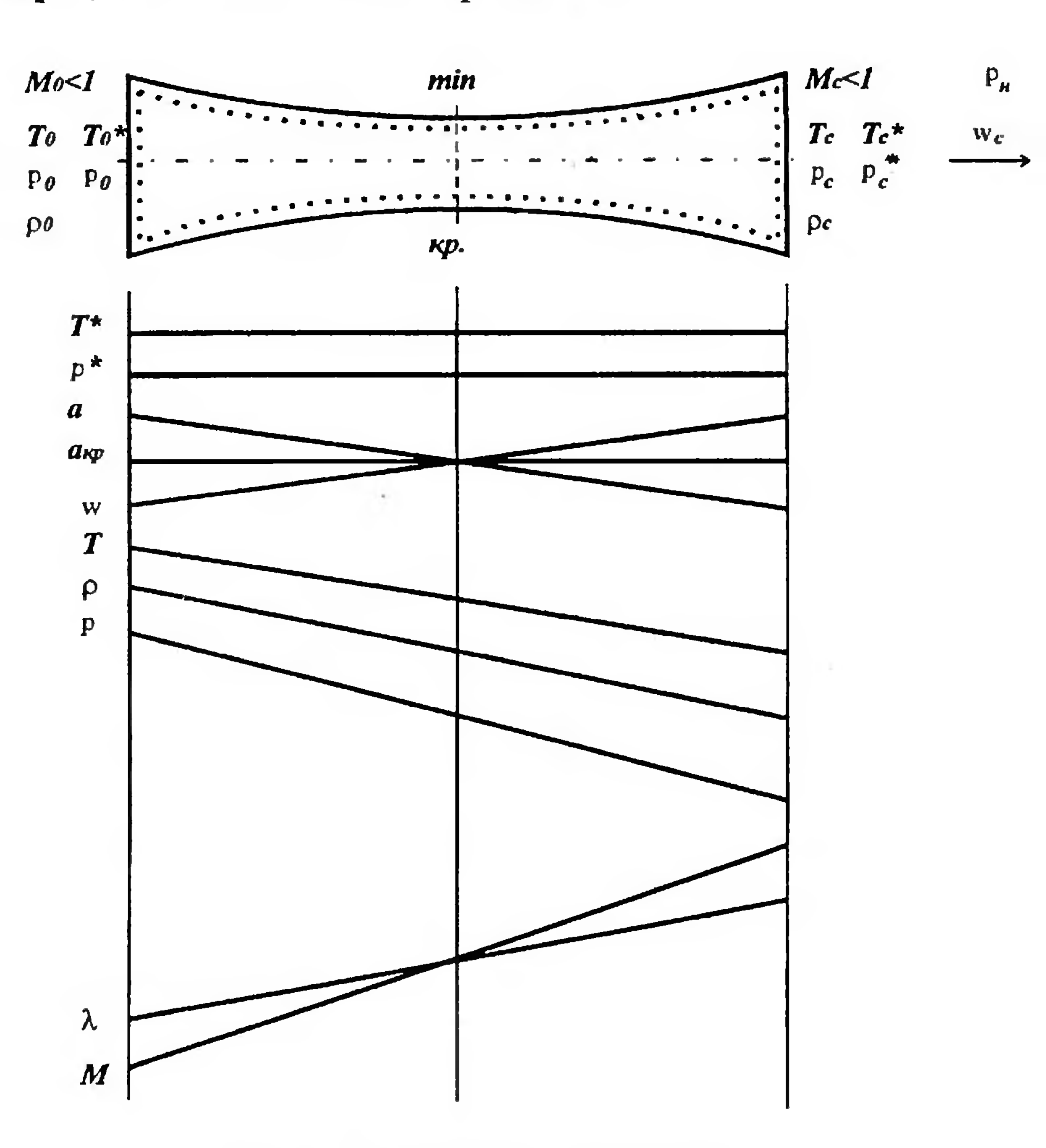


Рис. 7.6. Геометрическое сопло

Остальные параметры изменяются следующим образом. Скорость w растет, по определению, в соответствии с геометрическим воздействием, а статическое давление p уменьшается в соответствии с уравнением количества движения (второй закон Ньютона). Статическая температура T уменьшается из-за роста скорости w при постоянной температуре торможения T^*. Плотность торможения ρ^* также постоянна, так как постоянны p^* и T^*, в соответствии с уравнением состояния. Поэтому увеличение скорости w уменьшает статическую плотность ρ.

Приведенная скорость λ возрастает, так как $a_{кр}$ постоянна ($T^* = \text{const}$), а скорость потока w растет. С ростом λ растет и M, при этом скорость звука a уменьшается из-за уменьшения статической температуры T. Изменение всех параметров показано на рис. 7.6. В минимальном сечении сопла F_{min} скорость потока равна скорости звука $w = a$, которая в этом сечении равна критической скорости звука, т. е. $a = a_{кр}$. Поэтому минимальное сечение является критическим сечением, в котором $M = \lambda = 1$.

7.2.4. Модель расчета параметров в сопле*.

1. Уравнение расхода позволяет определить расход рабочего тела по параметрам в любом сечении: $G = m \dfrac{p_0^* q(\lambda) F}{\sqrt{T_0^*}}$.

2. Уравнение неразрывности связывает изменение скорости (λ) с изменением сечения (F): $q(\lambda_0) F_0 = q(\lambda) F$.

3. Уравнение количества движения в проекции на ось сопла позволяет определять силу действия потока на стенки канала сопла $\tilde{P}$:

$$-\tilde{P} = p^* f(\lambda) F - p_0^* f(\lambda_0) F_0, \quad -\tilde{P} = \frac{k+1}{2k} G a_{кр0} \left[z(\lambda) - z(\lambda_0) \right],$$

где $a_{кр0} = \sqrt{\dfrac{2k}{k+1} R T_0^*}$.

---

* См. простейшую газодинамическую модель в разд. 4.6.2.

4. Уравнение энергии: $T_0^* = T^*$.

5. Уравнение качества процесса: $p_0^* = p^*$.

6. Определяющее уравнение — уравнение состояния:

$$\rho_0^* = \frac{p_0^*}{RT_0^*} = \rho^* \text{ и } \rho = \frac{p}{RT}.$$

7. Соотношения для определения статических параметров:

$$p = p^* \pi(\lambda), \quad T = T^* \tau(\lambda), \quad \rho = \rho^* \varepsilon(\lambda).$$

8. Необходимое условие изменения состояния — уравнение Гюгонио:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F}.$$

9. Достаточное условие — располагаемый перепад давления: $\frac{p_\text{н}}{p_0^*} = \pi(\lambda_\text{расп})$, где $\lambda_\text{расп}$ — приведенная скорость потока, которая может быть получена на выходе из сопла при данном располагаемом перепаде давления, определяемом давлением торможения p_0^* и граничным условием — давлением окружающей среды $p_\text{н}$.

10. Граничные условия задаются по статическому давлению в окружающей среде на входе $p_\text{вх}$ и на выходе $p_\text{н}$.

При $\mathrm{M}_0 < 1$ необходимо, чтобы $p_\text{вх} = p_0$. При $\mathrm{M}_\text{с} < 1$ необходимо, чтобы $p_\text{с} = p_\text{н}$. Обычно первое условие для давления на входе выполняется соответствующим выбором $p_0 = p_\text{вх}$.

7.2.5. Параметры, характеризующие режимы течения в сопле с идеальным рабочим телом.

1. Располагаемый перепад давления на сопле

$$\pi^*_\text{с расп} = \frac{p_0^*}{p_\text{н}}. \tag{7.14}$$

2. Степень нерасчетности параметров на срезе сопла

$$n = \frac{p_с}{p_н}. \qquad (7.15)$$

3. Число Маха на срезе сопла

$$M_с = \frac{w_с}{a_с}. \qquad (7.16)$$

4. Отношение давления

$$\pi_с^* = \frac{p_с^*}{p_с}. \qquad (7.17)$$

Режим течения в сопле называется: ***расчетным*** — $n = 1$; режимом ***недорасширения*** — если $n > 1$; режимом ***перерасширения*** — если $n < 1$.

Режим $M_с < 1$ — ***дозвуковой*** режим истечения из сопла;

$M_с = 1$ — звуковой режим истечения из сопла;

$M_с > 1$ — сверхзвуковой режим истечения из сопла

Сопло, обеспечивающее определенный скоростной режим истечения, называется соответственно *дозвуковым, звуковым* или *сверхзвуковым*.

7.2.6. Обратная задача теории сопла. Обратная задача заключается в определении поля течения при условиях, заданных на некоторой поверхности, и условиях в начальном сечении [33]. При этом определяется и геометрия канала. Применительно к системе струйки в начальном сечении задаются: массовый расход G, энергетические параметры T_0^*, p_0^*, граничное условие по давлению на выходе как давление в окружающей среде $p_н$, теплофизические характеристики рабочего тела, k, C_p, R и распределение какого-либо параметра вдоль канала сопла. Целью расчета является определение изменения всех параметров вдоль канала сопла и геометрии канала. В качестве параметра, распределение которого задается, могут быть выбраны скорость w, давление p, приведенная скорость λ и другие. Поскольку рабочее тело идеальное и процесс в сопле обратимый, профиль ка-

нала $F = F(x)$ однозначно определяется заданием распределения любого из параметров (см. разд. 7.2.4). В обратной задаче всегда реализуется расчетный режим истечения $n = 1$. Поэтому значение $\lambda_{\text{с расп}}$ (и скорости $w_{\text{с}}$) легко определяется по величине располагаемого перепада

$$\pi^*_{\text{с расп}} = \frac{1}{\pi(\lambda_{\text{с расп}})}, \tag{7.18}$$

позволяющего определить газодинамическую функцию $\pi(\lambda_{\text{с расп}})$ и найти $\lambda_{\text{с расп}}$, например, по ТГДФ. При этом достаточное условие будет выполнено автоматически.

При проектировании реальных сопел с учетом необратимости течения (см. ниже) предпочтительнее использовать для решения обратной задачи закон распределения давления в виде

$$\overline{P} = \frac{1 + \dfrac{1}{\pi^*_{\text{с расп}}\,\pi(\lambda_0)}}{2} + \frac{1 - \dfrac{1}{\pi^*_{\text{с расп}}\,\pi(\lambda_0)}}{2}\left|\cos\pi\left(\frac{x}{l_{\text{с}}}\right)^{a_1}\right|^{a_2} \times$$

$$\times\,\text{sign}\left[\cos\pi\left(\frac{x}{l}\right)^{a_1}\right]. \tag{7.19}$$

Здесь

$$\overline{p} = \frac{p}{p_0} \tag{7.20}$$

— безразмерное давление; $l_{\text{с}}$ — длина сопла; x — текущая координата вдоль оси X, так что $0 \le x \le l_{\text{с}}$; $\pi(\lambda_0)$ — газодинамическая функция от значения приведенной скорости λ_0; a_1, a_2 — константы.

Уравнение (7.19), во-первых, автоматически обеспечивает выполнение условий по давлению на входе и выходе из сопла, во-вторых, гарантирует отсутствие разрыва производной на границах системы (входе и выходе), которое может иметь место при произвольном задании (например, в виде линейной функции) функции изменения какого-либо из параметров. В-тре-

тьих, варьируя коэффициентами a_1, a_2 , можно получить практически любую форму канала сопла в виде $F = F(x)$. Последнее весьма важно при учете эффектов двумерности течения и необратимости процесса.

После задания $p = p(x)$ все остальные параметры определяются в соответствии с моделью расчета разд. 7.2.4, по следующему алгоритму.

Выбирается длина сопла $l_с$ и начальное давление p_0 (например, из условия $p_0 = p_{вх}$), определяются $\pi(\lambda_0) = \dfrac{p_0}{p_0^*}$, λ_0 из $\pi(\lambda_0)$,

$$F_0 = \frac{T_0^* G}{m p^* q(\lambda_0)}. \quad (7.21)$$

Далее последовательным заданием x в диапазоне от 0 до $l_с$ определяют: $\bar{p}$ — из (7.19), p — из (7.20), λ — из $\pi(\lambda) = \dfrac{p}{p_0^*}$, T из $\tau(\lambda) = \dfrac{T}{T_0^*}$, $\rho = \dfrac{p}{RT}$, F — из

$$F = \frac{F_0\, q(\lambda_0)}{q(\lambda)}. \quad (7.22)$$

Профиль получающегося канала в зависимости от располагаемого перепада может быть либо сужающимся, либо сужающе-расширяющимся. Если $\pi^*_{с\ расп} \le \dfrac{1}{\pi(\lambda = 1)} = \dfrac{p_0^*}{p_н}$, то сопло будет сужающимся; при $\pi^*_{с\ расп} > \dfrac{1}{\pi(\lambda = 1)} = \dfrac{p_0^*}{p_н}$, сопло будет сужающе-расширяющимся. Для воздуха $k = 1{,}4$ и $\pi(\lambda = 1) = 0{,}528$.

7.2.7. Прямая задача теории сопла. Прямая задача состоит в определении поля течения при задании статического давления $p_0 = p_{вх}$, энергетических параметров p_0^*, T_0^*, геометрии канала $F = F(x)$ и граничного условия по давлению $p_н$.

Рассмотрим два типа задаваемой геометрии: сужающееся сопло и сужающе-расширяющееся сопло (сопло Лаваля).

1. Сужающееся сопло. Профиль канала сужающегося сопла показан на рис. 7.7. Будем полагать, что скорость на входе в сопло дозвуковая, т. е. $M_0 < 1$. Возможны следующие режимы работы сопла.

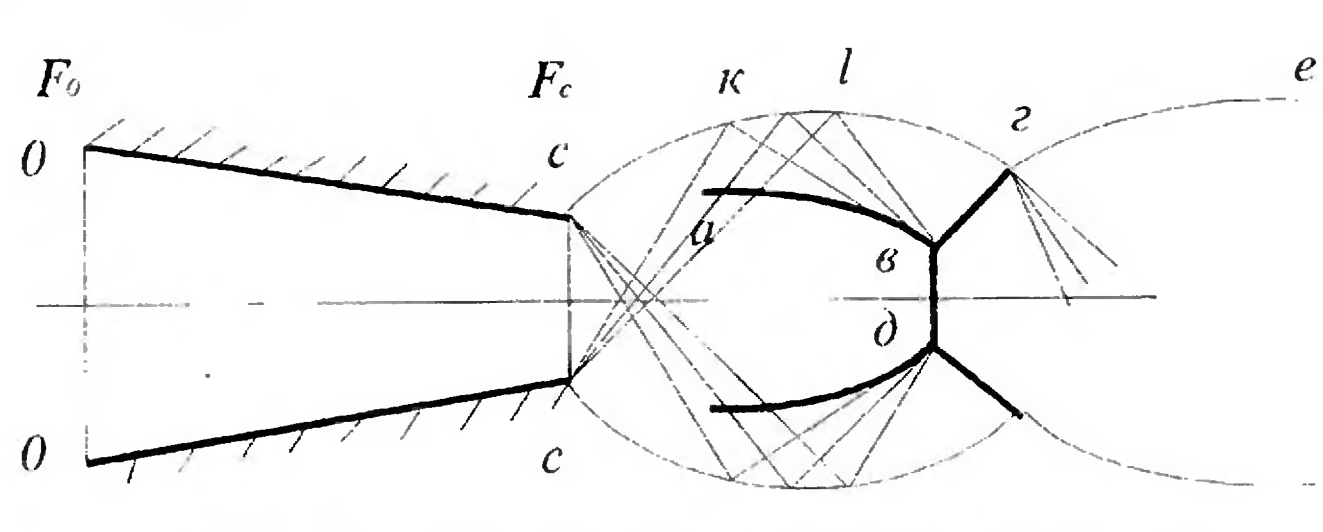


Рис. 7.7. Сужающееся сопло на режиме недорасширения

а) $\dfrac{p_н}{p_0^*} = 1$. Нет перепада давления, нарушено достаточное условие, и течения нет, хотя необходимое условие в виде геометрического воздействия $dF < 0$ присутствует.

б) $1 > \dfrac{p_н}{p_0^*} > \pi\,(\lambda = 1) = \dfrac{p_{кр}}{p_0^*}$. Эта область а—кр показана на графике функции $\pi\,(\lambda)$, рис. 7.8.

Располагаемый перепад давления обеспечивает получение только дозвуковой скорости истечения $M_c < 1$. В этом случае должно выполняться граничное условие по давлению на выходе из сопла $p_c = p_н$. Это же условие будет определять возможность существования режима, задаваемого $p_0 = p_{вх}$.

Если расход рабочего тела, подсчитанный по параметрам на срезе сопла, $G_c = m\dfrac{p_0^*\,q\,(\lambda_c)\,F_c}{\sqrt{T_0^*}}$ (где λ_c определяется по распола-

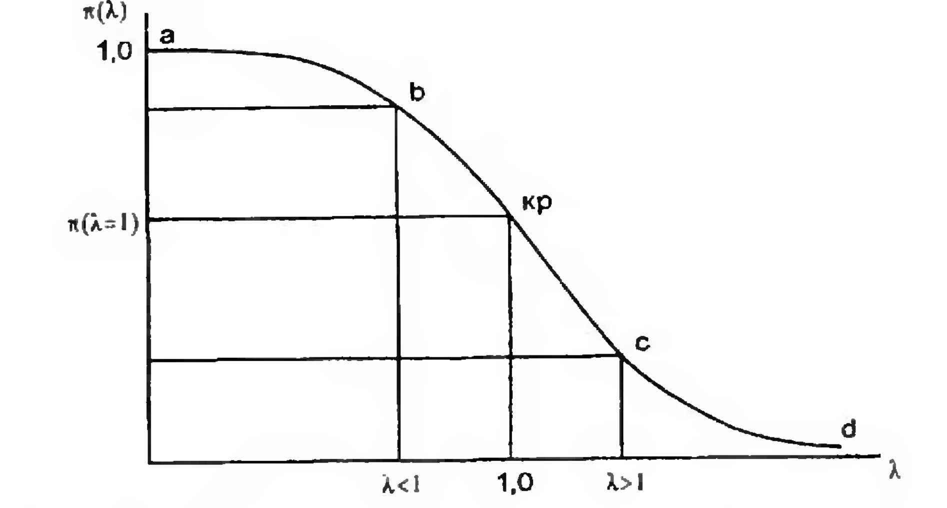


Рис. 7.8. К определению режимов течения в сопле

гаемому перепаду через $\pi(\lambda_с) = \frac{p_н}{p_0^*}$) окажется равным расходу, определенному по параметрам на входе $G_0 = m\frac{p_0^* q(\lambda_0) F_0}{\sqrt{T_0^*}}$, то сопло с заданной геометрией будет работать на этом режиме. В противном случае необходимо изменить геометрию, в частности, либо F_0, либо $F_с$, добиваясь выполнения уравнения неразрывности в виде

$$q(\lambda_0) F_0 = q(\lambda_с) F_с\,. \tag{7.23}$$

в) $\frac{p_н}{p_0^*} \le \pi(\lambda = 1)$. Отношение давлений соответствует области перепадов давления кр—d на рис. 7.8, обеспечивающей получение λ в диапазоне от $\lambda = 1$ до $\lambda = \lambda_{max}$. Однако в соответствии с необходимым условием (уравнением Гюгонио) при отсутствии обращения воздействия dF на выходе из сопла возможно получение только значения $\lambda_с = 1$. При этом давление на срезе $p_с = p_{кр}$ и может отличаться от $p_н$. Однако возможность существования режима с заданными условиями определяется выполнением условия неразрывности течения в виде

$$q(\lambda_0) F_0 = F_с. \tag{7.24}$$

Особенностью данного режима течения являются ***кризис течения и запирание*** сопла, которое перестает реагировать на внешние воздействия. При $\frac{p_н}{p_0^*} < \pi(\lambda_1)$ сопло работает на нерасчетном режиме недорасширения, так что $p_с > p_н$. Волны разрежения из окружающей среды, распространяющиеся со звуковой скоростью, не могут проникнуть через критическое сечение. Оставшийся перепад давления рабочего тела реализуется в окружающей среде в виде волновой структуры за соплом, показанной на рис. 7.7. Жидкая граница истекающей сверхзвуковой струи *с-г-е*, причем точка *с* является источником центрированной волны разрежения *с-к-л* с пучком характеристик, отражающихся от границы струи *с-г*. При этом тип характеристики изменяется на противоположный (на характеристику сжатия).

Сгущаясь, характеристики сжатия образуют висячий скачок уплотнения *а-в* с маховским отражением *в-д* и *в-г* от оси струи. Полученная структура называется *бочкой*. В зависимости от степени нерасчетности *n* внутренняя структура бочки может иметь различный вид, а число самих бочек отличаться от единицы. В частности, при небольших степенях нерасчетности ($n < 2$) скачки внутри бочки не возникают (только характеристики), но зато число самих бочек существенно увеличивается (до 10—15). При $n > 2$ кривизна границы сверхзвуковой струи увеличивается, что создает условия для образования висячего скачка, существование которого объясняется радиальным растеканием сильно перерасширенного потока из центральной области в периферийные, где давление равно давлению окружающей среды. Висячий скачок является осесимметричным, причем при приближении к соплу он ослабевает и до сопла не доходит. Отраженный кольцевой скачок *в-г*, попадая на жидкую границу *г-е*, отражается от нее в виде пучка характеристик, давая начало следующей бочке. Однако для ее возникновения необходимо, чтобы поток в сечении *г* имел давление $p_г > p_н$. Это возможно, если интенсивность прямого скачка *б-д* не очень велика (невелика степень нерасчетности *n*). При степенях нерасчетности $n > 5$ возникает только одна бочка. В бочках и скачках происходит процесс диссипации полезной энергии, имеющейся на

срезе сопла. При этом падает давление торможения p^*, и через некоторое время струя становится изобарической.

2. **Сопло Лаваля.** Как уже отмечалось, сопло Лаваля — сужающе-расширяющийся канал, в котором знак геометрического воздействия изменяется в минимальном сечении, являющимся критическим, на противоположный. Это позволяет удовлетворить необходимому условию в форме закона обращения воздействия и обеспечить непрерывное ускорение потока вплоть до больших сверхзвуковых скоростей. ***Минимальное сечение*** сопла Лаваля называется *горлом*. Профиль канала сопла показан на рис. 7.9.

Будем полагать, что на входе в сопло $M_0 < 1$, т. е. течение дозвуковое. Возможны следующие режимы работы сопла.

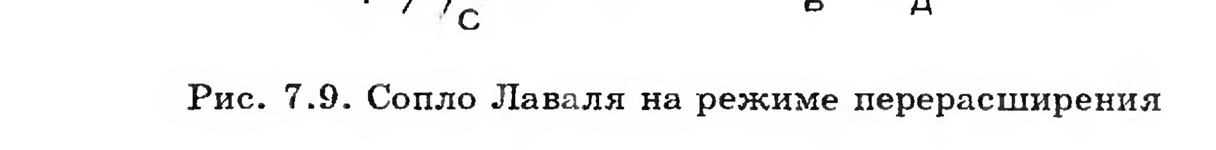


Рис. 7.9. Сопло Лаваля на режиме перерасширения

а) **Расчетный режим.** Этот режим соответствует значению давления на выходе из сопла $p_с = p_н$, а перепад давления $\pi^*_{с\ расп} = \dfrac{p_0^*}{p_н}$ (где $\pi^*_{с\ расп}$ — расчетное значение $\pi^*_с$) определяет значение $\lambda_с$ на выходе (газодинамическая функция $\pi(\lambda_с) = \dfrac{1}{\pi^*_{с\ расп}}$, область режимов течения обозначена на рис. 7.7 от значения кр до значения d).

Для обеспечения существования режима должны выполняться условия уравнения неразрывности на дозвуковом и сверхзвуковом участках сопла. Для дозвукового сужающегося участка сопла имеем

$$q(\lambda_0) F_0 = F_{кр} ; \qquad (7.25)$$

для сверхзвукового

$$q(\lambda_с) F_с = F_{кр} . \qquad (7.26)$$

Распределение остальных параметров определяется на основе уравнения неразрывности

$$q(\lambda) = \frac{F_{кр}}{F} \qquad (7.27)$$

с учетом двузначности функции $q(\lambda)$. Для дозвуковой части сопла по значению $q(\lambda)$ берутся дозвуковые значения λ, для сверхзвуковой — сверхзвуковые значения. По полученным значениям λ определяются все необходимые параметры с помощью газодинамических функций аналогично обратной задаче.

b) **Режим недорасширения** $n = \frac{p_с}{p_н} > 1$. Возможен, если располагаемый перепад больше расчетного, т.е.

$$\pi^*_{с\ расп} = \frac{p_0^*}{p_н} > \pi^*_{с\ расп} = \frac{p_0^*}{p_с} . \qquad (7.28)$$

При этом выполнены условия (7.25) и (7.26). В этом случае течение в сопле полностью аналогично расчетному случаю течения при изменении параметров в сопле от p_0 до $p_с$. За срезом сопла будет течение с недорасширением, аналогичное течению с недорасширением из сужающегося сопла (см. выше в данном разделе). Разница лишь в том, что искривление струи за соплом начинается при расширении потока за точкой отражения первой характеристики от границы струи,а не за срезом сопла, как в сужающемся сопле.

c) **Режим перерасширения.** Этот режим течения реализуется, когда располагаемый перепад давления $\pi^*_{с\ расп} = \frac{p_0^*}{p_н}$ оказывается меньше перепада, определяемого геометрией канала, работающего на расчетном режиме:

$$\pi^*_{\text{с расч}} = \frac{p_0^*}{p_\text{с}}, \quad \text{т.е. } \pi^*_\text{расп} < \pi^*_{\text{с расч}}. \qquad (7.29)$$

В зависимости от разницы между $\pi^*_{\text{с расп}}$ и $\pi^*_{\text{с расч}}$ (соответственно располагаемым и расчетным значениями $\pi^*_\text{с}$) возможно существование следующих типов течения на режиме перерасширения (рис. 7.10). Рассмотрим режимы перерасширения, после-

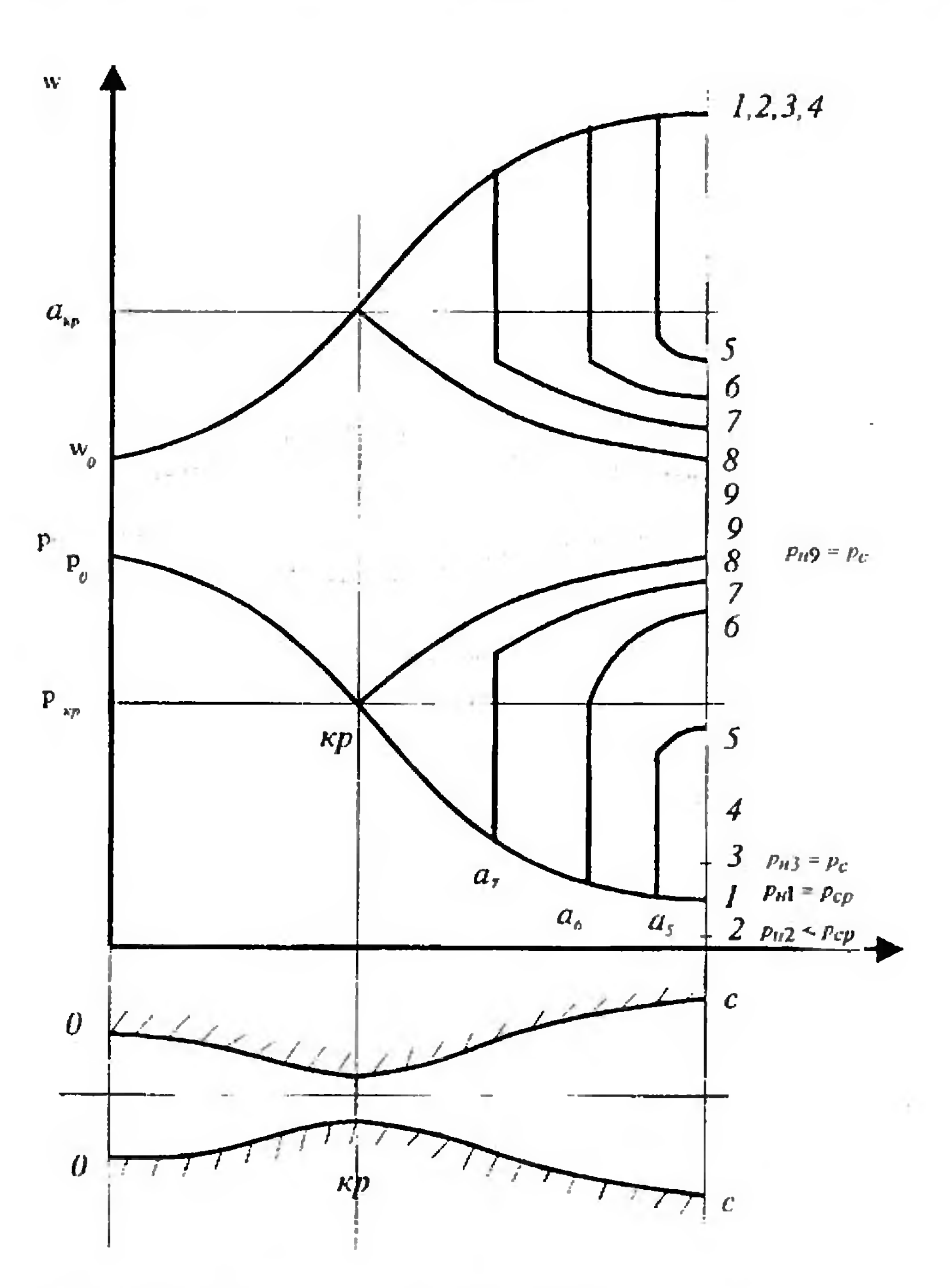


Рис. 7.10. Типы течения в сопле Лаваля на режиме перерасширения

довательно увеличивая давление в окружающей среде $p_н$ и оставляя неизменными (до определенного предела) p_0^* и p_0 [2]. До некоторого предела (определяемого точкой *4* на графике рис. 7.10) повышение давления $p_н$ не влияет на течение по соплу, которое остается расчетным. Это объясняется тем, что волны возмущения повышенного давления сносятся сверхзвуковым потоком, вытекающим из сопла. Картина рассматриваемого вида течения показана на рис. 7.9 для случая истечения из плоского сопла Лаваля. Перерасширенный поток в области *CBC* имеет давление $p_с$, соответствующее расчетному режиму по геометрии канала сопла. Затем, проходя косой скачок *CB*, он восстанавливает давление до $p_{нз}$ (давления в окружающей среде), но при этом получает отклонение в сторону оси. Таким образом, на границе струи *CA* давление уравновешивается. Скачок *CB* регулярно отражается в точке *B* от оси в виде скачка *BA*, пройдя который, поток возвращается к первоначальному осевому направлению, однако его давление оказывается выше атмосферного. Косые скачки *BA* отражаются в точке *A* от жидкой границы в виде центрированной волны разрежения, проходя которую поток разгоняется и понижает давление до атмосферного. Характеристики центрированной волны переотражаются от границы струи в виде характеристик сжатия, образуя структуру недорасширенной струи при малой степени нерасчетности, рассмотренную выше.

Дальнейшее повышение давления окружающей среды (выше точки *4*) увеличивает угол наклона косых скачков *CB*, уменьшает скорость потока за ними и увеличивает угол поворота на отраженных скачках *BA*. Когда этот угол ω становится больше ω_{max} для значения *M* в области *CBA*, регулярное отражение скачка *CB* заменяется на маховское, образуя так называемую мостообразную систему с прямым скачком на оси и отраженными косыми скачками *BA* на периферии (см. разд. 5.10.2, рис. 5.15,*а*). При дальнейшем повышении давления прямой скачок занимает все большую долю сечения и приближается к срезу сопла. При $\dfrac{p_{н4}}{p_с} = \dfrac{2k}{k+1}\,\mathrm{M}_с^2 - \dfrac{k-1}{k+1}$ прямой скачок оказывается на срезе сопла, а течение за ним — дозвуковое. По мере роста дав-

ления окружающей среды скачок проникает внутрь сопла (точка *5*), а течение за прямым скачком на участке сопла a_5-1 становится диффузорным, т. е. давление на этом участке растет, а скорость уменьшается. При этом давление на срезе сопла $p_с = p_{н5}$, так как течение на выходе из сопла дозвуковое. При $p_{н8}$ скачок доходит до критического сечения и исчезает, а течение на сужающемся и расширяющемся участке становится дозвуковым. Дальнейшее повышение давления (точка *9*) приводит к нарушению условий (7.25) и (7.26) и переходу системы на новый режим по расходу и статическим параметрам p_0, T_0, ρ_0, w_0 в начальном сечении сопла.

7.2.8. Влияние режимов истечения из сопла Лаваля на тягу реактивного двигателя. Сверхзвуковая часть сопла Лаваля (расширяющийся канал) создает составляющую силы P_{x1} в направлении силы тяги (рис. 7.11, сопло *1*). На сверхзвуковой части профиля сопла Лаваля показано распределение избыточного давления $\Delta p = p - p_н$, где p — давление, действующее изнутри сопла на его стенки на участке *abc*. Сопло *1* (рис. 7.11), соответствует расчетному режиму: $p_с = p_н$. Нерасчетные режимы можно смоделировать, укорачивая или удлиняя сопло (сопла *2* и *3*, рис. 7.11). На режиме недорасширения ($p_с > p_н$) исчезает часть силы на участке *bc* за счет укорачивания сопла, и тяга уменьшается. На режиме перерасширения ($p_с < p_н$) на добавленную часть сопла *cd* будет действовать сила P_{x3} в направлении против силы тяги.

Таким образом, расчетный режим является оптимальным и обеспечивает максимальное значение тяги при прочих равных условиях. На практике с целью уменьшения веса сопла часто используют укороченные по сравнению с расчетными сопла, пренебрегая потерями в силе тяге, которые в определенных пределах укорачивания сопла могут быть незначительными.

7.2.9. Сопло с косым срезом. При решении некоторых газодинамических задач, например в турбинах, требуется поворачивать сверхзвуковой поток. Поворот оси сверхзвукового канала обычно приводит к возникновению сложной волновой структуры течения и дополнительным потерям работоспособности (уменьшению давления торможения) рабочего тела. Проблему

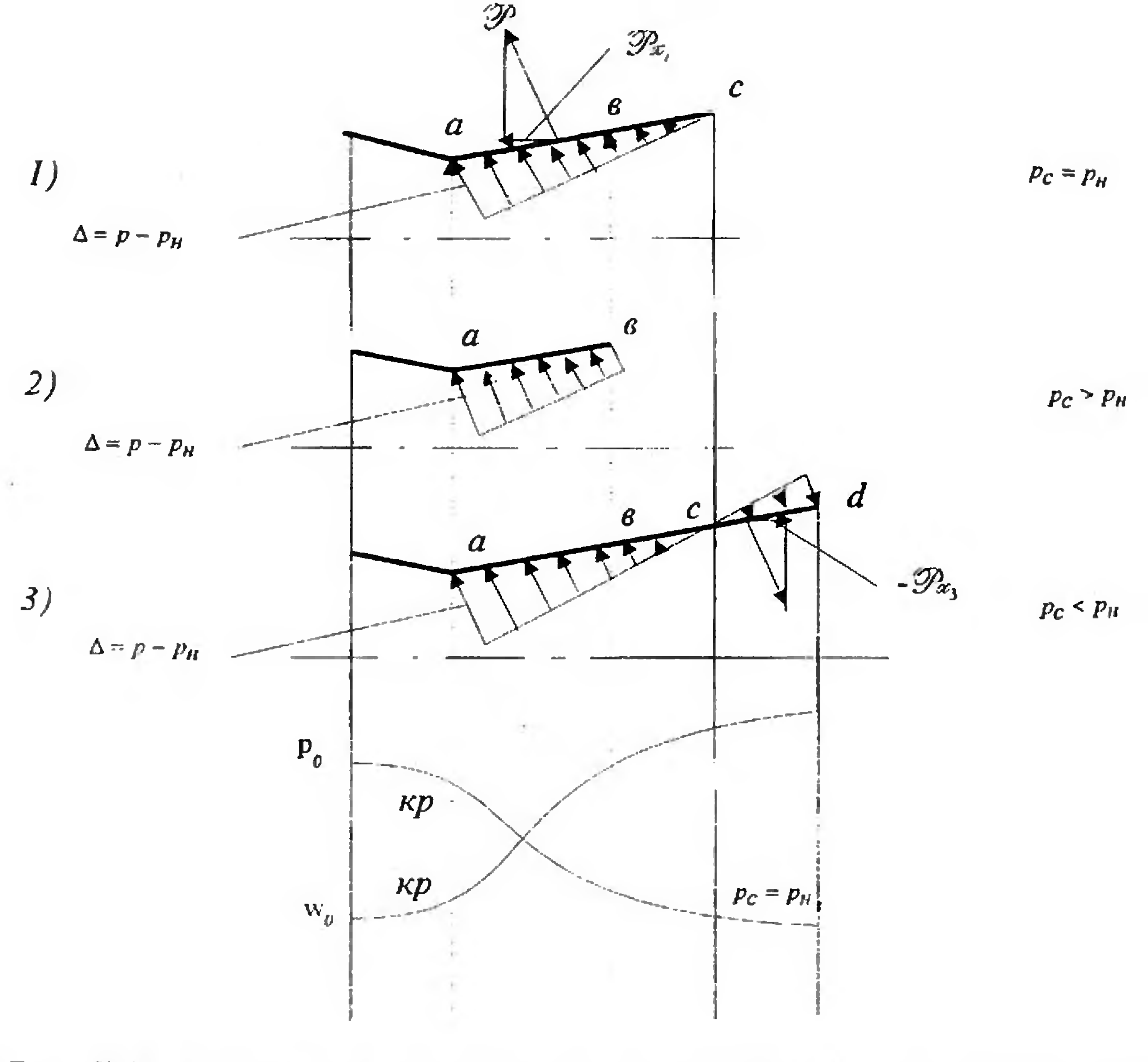


Рис. 7.11. Влияние расширяющейся части сопла Лаваля на силу тяги

поворота потока можно решить, используя несимметричное течение Прандтля-Майера в центрированной волне разрежения. С этой целью срез сопла делается косым, т. е. плоскость выходного сечения сопла располагают под некоторым углом к оси.

На рис. 7.12 показано плоское сопло Лаваля с косым срезом. Точка C генерирует центрированную волну разрежения в виде пучка характеристик *СДК*, проходя которые недорасширенный сверхзвуковой поток с давлением $p_с$ и скоростью $w_с$ поворачивает на угол δ, разгоняясь при этом до скорости $w_к$ и расширяясь до давления $p_к$, равного давлению в окружающей среде $p_н$, т. е.

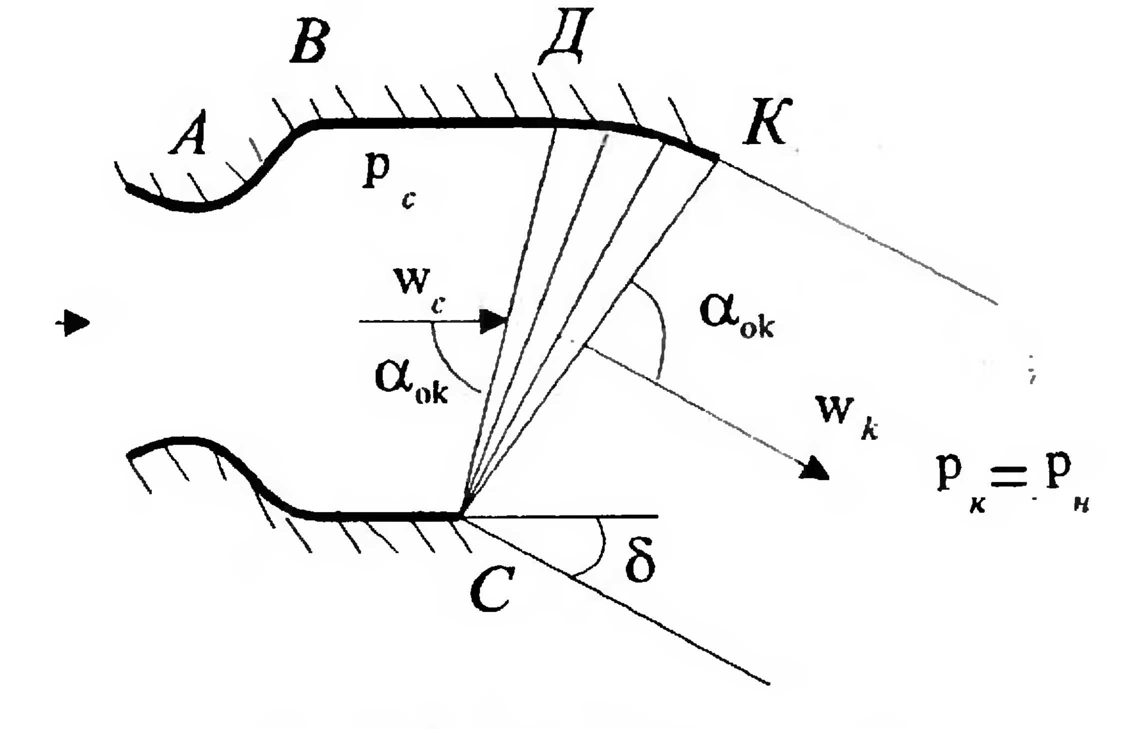


Рис. 7.12. Сопло с косым срезом

$p_к = p_н$. Участок сопла *ДК* профилируется по линии тока, поэтому характеристики *СДК* не отражаются от стенки. Последняя характеристика *СК* совпадает с косым срезом сопла.

Возможно также использование сужающихся сопел с косым срезом для поворота сверхзвукового потока.

7.2.10. Об учете реальных свойств течения и рабочего тела в соплах. Рассмотренная выше теория течения в соплах на основе одномерной теории струйки с изоэнтропическим процессом качественно правильно, а в некоторых случаях и количественно верно оценивает работу сопла. Вместе с тем она не учитывает неодномерный характер течения и необратимость процесса. Современные численные методы решения, развитие теории пограничного слоя и наличие мощных вычислительных машин позволяют рассчитывать течения и профилировать сопла с учетом многих факторов [33, 34]. Однако возможен учет отмеченных факторов и более простыми методами. В частности, на практике широко используются следующие эмпирические коэффициенты [2].

1. Скоростной коэффициент $\varphi_с$ — отношение действительной среднерасходной скорости истечения $w_{ср} = \lambda_{ср}\, a_{кр}$ к скорос-

ти изоэнтропного истечения $w_{си} = \lambda_{си}\, a_{кр}$ при одинаковом располагаемом перепаде $\pi^*_{с\ расп} = \frac{p^*_0}{p_н}$ и температуре торможения T^*_0

$$\varphi = \frac{w_{ср}}{w_{си}} = \frac{\lambda_{ср}}{\lambda_{си}}. \quad (7.30)$$

2. ***Коэффициент сохранения давления торможения в сопле*** $\sigma_с$ — отношение давления торможения $p^*_с$ на срезе сопла к давлению торможения на входе в сопло p^*_0. Можно установить связь между σ и φ в виде

$$\sigma = \frac{p^*_с}{p^*_0} = \frac{p_н\, p^*_с}{p_н\, p^*_0} = \frac{\pi\,(\lambda_{си})}{\pi\,(\lambda_{ср})} = \frac{\pi\,(\lambda_{си})}{\pi\,(\lambda_{си}\,\varphi)}\,. \quad (7.31)$$

3. ***Коэффициент расхода*** $\psi_с$ — отношение действительного расхода газа

$$G_{ср} = \rho_{ср}\, w_{ср}\, F_с \quad (7.32)$$

к расходу при изоэнтропном истечении

$$G_{си} = \rho_{си}\, w_{си}\, F_с\,; \quad (7.33)$$

$$\varphi_с = \frac{G_{ср}}{G_{си}} = \frac{\rho_{ср}}{\rho_{си}}\,\varphi, \quad (7.34)$$

или в газодинамической форме (p^*_0 и T^*_0 — одинаковы)

$$m\,\frac{p^*_с\, q\,(\lambda_{ср})\, F_с}{\sqrt{T^*_0}} = \psi_с\, m\,\frac{p^*_0\, q\,(\lambda_{си})\, F_с}{\sqrt{T^*_0}}, \quad (7.35)$$

откуда

$$\psi_с = \sigma_с\,\frac{q\,(\lambda_{ср})}{q\,(\lambda_{си})} = \sigma_с\,\frac{q\,(\lambda_{си}\cdot\varphi_с)}{q\,(\lambda_{си})}\,. \quad (7.36)$$

Значения скоростных коэффициентов φ_c для сужающихся сопел составляют 0,92—0,99. Меньшие значения имеют отверстия и конические сопла, большие — профилированные сопла. Коэффициенты сохранения давления торможения изменяются в широких пределах ($\sigma_c = 0{,}7 \div 0{,}98$) в зависимости от геометрии сопла и режима его работы.

Значения коэффициентов расхода ψ_c определяются геометрией сопла и критериями скоростного режима M и гидравлического режима Re и лежат в пределах $\psi_c = 0{,}8 \div 0{,}998$. Коэффициенты φ, σ, ψ позволяют уточнить расчет сопла для случая реального течения, заменяя величину $\lambda_{си}$ на $\lambda_{ср}$. (Более подробно см. [2, 34].)

7.2.11. О месте и роли сопла при проектировании двигателя. Как правило, при проектировании двигателя задаются: сила тяги P, скорость полета $w_н$ и условия окружающей среды в виде давления $p_н$. Это позволяет оптимизировать процесс течения на участке течения по соплу и определить необходимые энергетические параметры, а именно: массовый расход G, давление торможения p_0^* и температуру торможения T_0^* на входе в сопло, обеспечивающее получение заданной тяги P при выбранных $w_н$ и $p_н$. Параметры G, p, T позволяют сформулировать задачу для генератора рабочего тела как устройства, которое должно обеспечить получение рабочего тела с характеристиками (G, p_0^*, T_0^*) при задаваемых $w_н$ и $p_н$. Это позволяет провести также оптимизацию генератора, выбирая наилучший, и в конечном счете получить оптимальный двигатель.

Сегодня двигатель проектируется как подсистема летательного аппарата, целевые критерии которого не всегда отвечают целевым критериям двигателя. Однако изложенные выше соображения можно использовать при любом подходе к проектированию.

7.3. Диффузор

7.3.1. Назначение диффузора. *Диффузором* называется устройство, служащее для торможения и сжатия потока. В соответствии с уравнением обращения воздействий (4.97) торможе-

ние и сжатие потока можно осуществить любым из возможных воздействий, однако наибольшее распространение получили геометрические диффузоры, в которых преобразование кинетической энергии потока в потенциальную энергию давления и внутреннюю энергию осуществляется за счет геометрического или силового воздействия.

7.3.2. Геометрический диффузор. Геометрический диффузор служит для торможения и сжатия рабочего тела с помощью геометрического или силового воздействия путем преобразования его кинетической энергии в потенциальную энергию давления и внутреннюю энергию. Геометрические диффузоры широко используются в качестве входных устройств ВРД, межлопаточных каналов компрессоров, в камерах сгорания, аэродинамических трубах и т. д.

Рассмотрим основы теории геометрического диффузора при следующих допущениях.

1. Течение одномерное, стационарное.
2. Ось диффузора прямолинейная.
3. Рабочее тело — совершенный газ с постоянными теплофизическими характеристиками k, C_p, R.
4. Течение энергетически изолированное. Стенки сопла адиабатные.
5. Процесс в диффузоре необратимый.

7.3.3. Анализ процесса в геометрическом диффузоре. Сделанные выше допущения позволяют воспользоваться газодинамической моделью элементарной струйки (см. разд. 4.6.1). Уравнение обращения воздействия для рассматриваемого случая имеет вид

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k}{a^2}\, dl_{\text{тр}} . \qquad (7.37)$$

В отличие от сопла скорость на входе в диффузор существенно выше, а поскольку потери на трение пропорциональны квадрату скорости, то в диффузоре, как правило, необходимо учитывать диссипативные процессы и считать процесс необратимым. Уравнение для изменения давления торможения p^* в диффузоре имеет вид

$$\frac{dp^*}{p^*} = \frac{k}{a^2}\, dl_{\text{тр}} \,. \qquad (7.38)$$

Из (7.38) следует, что диссипативные процессы (трение) в дозвуковом потоке будут мешать торможению потока, причем в дозвуковом потоке канал должен быть расширяющимся, а в сверхзвуковом — сужающимся. Специфика торможения сверхзвукового потока (образование ударных волн или скачков уплотнения) предъявляет определенные требования к форме каналов диффузора. Поэтому геометрия канала будет рассмотрена ниже при анализе работы диффузоров различного типа, которые можно разделить по числу Маха на три группы: дозвуковые для $M_{\text{н}} < 1$; малых сверхзвуковых скоростей до $M_{\text{н}} < 1{,}5$; сверхзвуковые для $M_{\text{н}} > 1{,}5$. Однако принципиально изменение параметров во всех типах диффузоров одинаково. В частности, из условия энергоизолированности и адиабатичности стенок следует условие постоянства температуры торможения $T^* = \text{const}$; из уравнения качества процесса (7.38) следует уменьшение давления торможения p^*; из определения диффузора и второго закона Ньютона — уменьшение скорости w и рост статического давления p; а из уменьшения скорости w при сохранении температуры торможения T^* — рост статической температуры и плотности. Очевидно, что числа M и λ также уменьшаются (падение скорости при постоянной критической скорости звука).

7.3.4. Модель расчета параметров в диффузоре. Обозначим параметры в начальном сечении индексом “0”, параметры на выходе из диффузора — индексом “д”. Тогда уравнения струйки в газодинамической форме примут следующий вид:

уравнение неразрывности

$$p_0^* \, q\,(\lambda_0)\, F_0 = p_{\text{д}}^* \, q\,(\lambda_{\text{д}})\, F_{\text{д}} \,; \qquad (7.39)$$

уравнение энергии

$$T_0^* = T_{\text{д}} \,;$$

уравнения количества движения

$$-\tilde{P} = p_д^* f(\lambda_д) F_д - p_0^* f(\lambda_0) F_0 ; \quad (7.40)$$

$$-\tilde{P} = \frac{k+1}{2k} G a_{кр} \left[z(\lambda_д) - z(\lambda_0) \right] . \quad (7.41)$$

Здесь $\tilde{P}$ — сила,с которой газ действует на стенки диффузора,

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_0^*};$$

уравнения состояния — определяющие уравнения

$$R = \frac{p_0^*}{\rho_0^* T_0^*} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_д^*}{\rho_0^* T_д^*} = \frac{p_д}{\rho_д T_д} .$$

Уравнение качества процесса задается в виде коэффициента восстановления давления торможения

$$\sigma_д = \sigma_{ск}\, \sigma_{вн} = \frac{p_д^*}{p_н^*} , \quad (7.42)$$

где $\sigma_{ск}$ — коэффициент, учитывающий волновые потери в скачках уплотнения; $\sigma_{вн}$ — коэффициент, учитывающий внутренние потери от трения в пограничном слое, от возможного отрыва пограничного слоя и др.

Величина $\sigma_{ск}$ рассчитывается на основе теории ударных волн и скачков уплотнения, изложенной выше (глава 5) для каждой конкретной схемы диффузора.

Величина $\sigma_{вн}$ может быть определена по приближенной формуле [26, 9]:

$$\sigma_{вн} = 1 - \delta \frac{k}{r+1} \lambda_д^2 , \quad (7.43)$$

где δ — некоторая функция [2, 9], значение которой определяется геометрией диффузора, скоростным и гидравлическим режимами течения. Значения $\sigma_{вн}$ находятся в пределах 0,9—0,98. Значения $\sigma_{ск}$ зависят от числа M полета и конструкции

части диффузора, предназначенной для торможения сверхзвукового потока, и могут колебаться в пределах от 0,1 до 1,0.

Соотношения для определения статических параметров

$$p_0 = p_0^* \pi(\lambda_0), \quad T_0 = T_0^* \tau(\lambda_0), \quad p_д = p_д^* \pi(\lambda_д),$$

$$T_д = T_д^* \tau(\lambda_д), \quad \rho_д = \rho_д^* \varepsilon(\lambda_д). \tag{7.44}$$

Граничные условия по давлению на входе и выходе:

$$\text{при } M_0 < 1 \; p_{вх} = p_0; \quad \text{при } M_д < 1 \; p_д = p_{вых}. \tag{7.45}$$

7.3.5. Параметры, характеризующие работу диффузора, и требования, предъявляемые к диффузорам.

1. Степень сжатия рабочего тела по статическим параметрам

$$\pi_д = \frac{p_д}{p_н}. \tag{7.46}$$

2. Коэффициент расхода $\varphi_д$ как отношение действительного расхода рабочего тела $G_{действ}$ к расчетному расходу $G_р$, определяемому по параметрам невозмущенного потока $w_н$, $\rho_н$ и площади на входе в диффузор F_0:

$$\varphi_д = \frac{G_{действ}}{G_р} = \frac{\rho_н w_н F_н}{\rho_н w_н F_0} = \frac{F_н}{F_0}. \tag{7.47}$$

3. Коэффициент восстановления давления торможения или полного давления (7.42)

$$\sigma_д = \frac{p_д^*}{p_н^*}.$$

4. Коэффициент внешнего сопротивления диффузора (7.43)

$$C_x = \frac{X}{\dfrac{\rho_н w_н^2}{2} F},$$

где X — сила внешнего сопротивления диффузора

$$X = X_{доп} + X_р + X_{тр} ; \qquad (7.48)$$

$X_{доп}$ — сила дополнительного сопротивления; $X_р$ — сила сопротивления давления; $X_{тр}$ — сила сопротивления трения; F — характерная площадь сечения диффузора, например, миделевого сечения или F_0.

5. Коэффициент дополнительного сопротивления диффузора $X_{доп}$ (является составной частью C_X)

$$C_{x_{доп}} = \frac{X_{доп}}{\frac{\rho_н w_н}{2} F} . \qquad (7.49)$$

Дополнительное сопротивление диффузора появляется на режимах дросселирования, когда коэффициент расхода $\varphi_д \neq 1$.

6. Число Маха $M_н$ полета, на котором предполагается использовать диффузор.

Очевидно, что значения вышеперечисленных характеристик в значительной степени определяются конструктивными особенностями геометрии диффузора, т. е. F_0, $F_д$, $F(x)$, которые характеризуют тип процесса сжатия в диффузоре. Различают *три типа процесса* сжатия в зависимости от того, как реализуется этот процесс. Если процесс торможения осуществляется до входа в диффузор, то диффузор относят к устройствам *внешнего сжатия*, если процесс сжатия происходит внутри диффузора (за входом), то диффузор относят к устройствам *внутреннего сжатия*. Третий тип — это диффузор *смешанного сжатия*, в котором используются оба предыдущих типа сжатия: внешнее и внутреннее последовательно.

Требования, предъявляемые к диффузорам на статических режимах, заключаются в получении заданной степени сжатия $\pi_д$ при максимальном значении $\sigma_д$, $\varphi = 1$ и минимальном значении C_x при $C_{x_{доп}} = 0$.

7.3.6. Расчетный режим. Режим работы диффузора, соответствующий $\varphi = 1$, называется *расчетным*. Режимы с $\varphi \neq 1$ — *нерасчетные*.

На расчетом режиме решается обратная задача, т. е. задаются условия полета и окружающей среды $М_н$, $p_н$, $\rho_н$, $T_н$ теплофизические характеристики рабочего тела (как правило, воздуха) k, $C_р$, R , степень сжатия $\pi_д$ и расход G. Для $\varphi = 1$ определяются геометрия диффузора F_0, $F_д$, $F(x)$ и характеристики $\sigma_д$ и C_x .

На нерасчетных режимах решается прямая задача, т. е. задаются условия полета и окружающей среды $М_н$, $p_н$, $\rho_н$, $T_н$, теплофизические характеристики рабочего тела k, $C_р$, R и геометрия диффузора F_0, $F_д$, $F(x)$. Определяются $\sigma_д$, C_x , $C_{x_{доп}}$ и $\pi_д$.

7.3.7. Дозвуковые диффузоры. Диффузоры, используемые на дозвуковых скоростях при $M < 1$, называют *дозвуковыми*. Они представляют собой расширяющиеся каналы с плавно очерченными входными кромками для предотвращения отрыва потока на входе. Рассмотрим работу дозвукового диффузора на различных режимах и проведем сравнительную их оценку. Рис. 7.13,*а* иллюстрирует работу диффузора на расчетном режиме с коэффициентом расхода $\varphi = 1$. Ниже диффузора показано изменение параметров в невозмущенном потоке и внутри диффузора. Особенностью этого режима является равенство площади струйки $F_н$, входящей в диффузор площади, F_0 диффузора на входе.

Нерасчетный режим работы диффузора с $\varphi < 1$ получается при введении за диффузором дополнительного сопротивления (дросселя), повышающего давление за диффузором и, следовательно, давление p_1. Это приводит к уменьшению расхода через диффузор, площадь струйки $F_н$ становится меньше площади входа F_0 (рис. 7.13,*б*). В этом случае торможение потока начинается до входа в диффузор, так что давление p_0 на входе будет выше,чем на расчетном режиме. Это, с одной стороны, снижает потери давления торможения p^* (часть пути торможения не испытывает гидравлического сопротивления, и скорость в диффузоре меньше), поэтому $\sigma_{д,\ \varphi < 1} > \sigma_{д,\ \varphi = 1}$. Но с другой стороны,

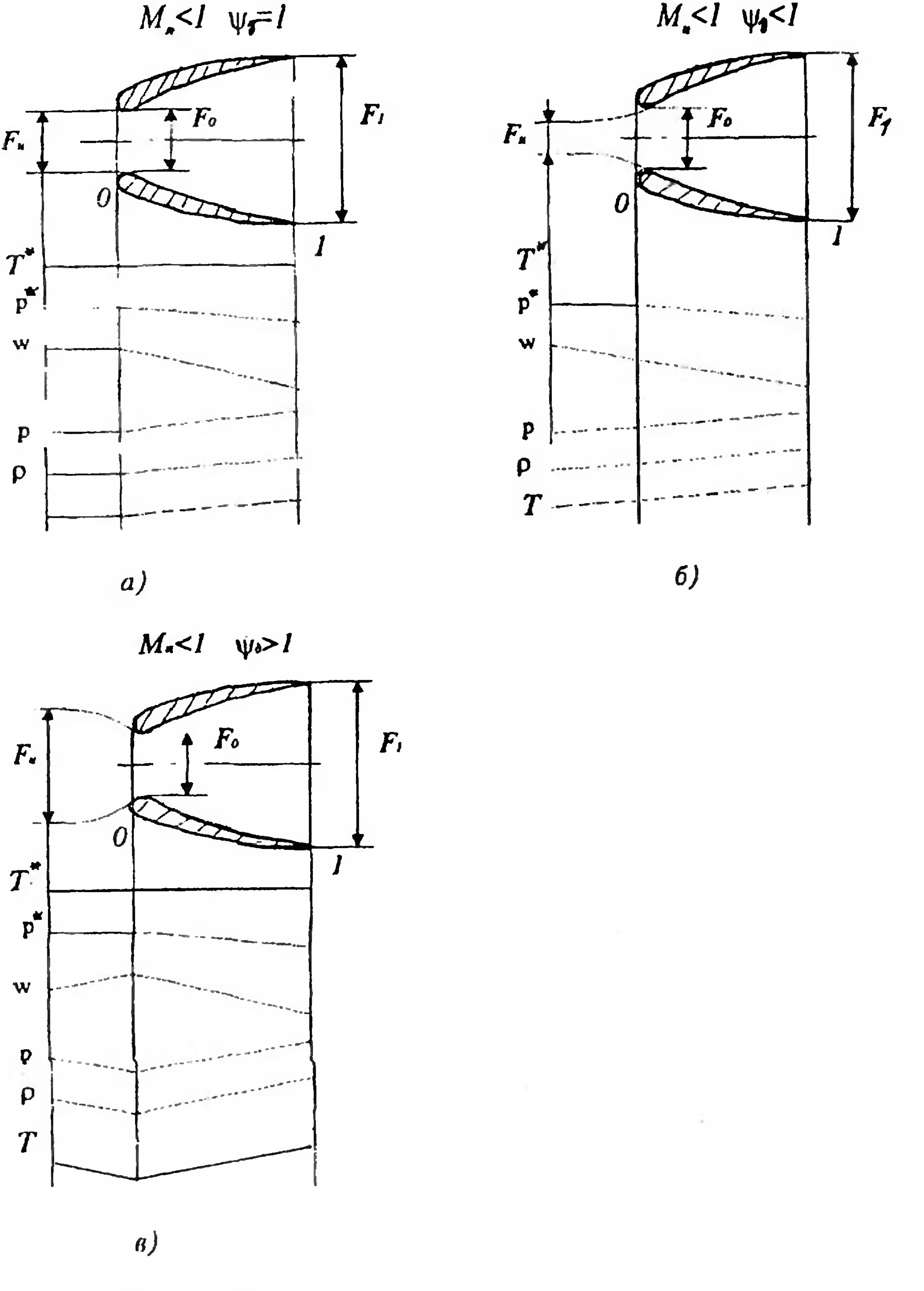


Рис. 7.13. Режимы работы дозвукового диффузора

появляется дополнительное сопротивление ($C_{x_{доп}} > 0$), отсутствовавшее на расчетном режиме. Степень сжатия $\pi_д$ на этом режиме, как и $\sigma_д$, оказывается выше, чем на расчетном режиме (предварительное сжатие потока до диффузора).

Нерасчетный режим работы диффузора с $\varphi_д > 1$ может быть получен путем снижения сопротивления за диффузором (и давления p_1) за счет создания разрежения с помощью компрессора. Это так называемый режим *засасывания* (рис. 7.13,*в*). Поток в этом случае предварительно разгоняется перед диффузором, скорость потока w_0 больше, чем на расчетном режиме, а давление p_0 меньше. Это уменьшает степень сжатия $\pi_д$ по сравнению с расчетным режимом, уменьшает $\sigma_д$ (большие, чем на расчетном режиме, скорости течения в диффузоре) коэффициент $C_{x_{доп}} < 0$. Площадь струйки $F_н > F_0$.

7.3.8. Диффузоры для небольших сверхзвуковых скоростей. Этот тип диффузора используется в диапазоне чисел $1 < M < 1{,}5$. Он имеет расширяющийся канал, подобно дозвуковым диффузорам, но отличается острыми входными кромками. Особенностью работы диффузора является наличие прямого скачка или ударной волны перед ним, однако потери давления торможения невелики и на $M = 1{,}5$ $\sigma_{ск} > 0{,}93$.

Рассмотрим работу диффузора на различных режимах, иллюстрируемых рис. 7.14. (Там же приведены графики изменения параметров.) На расчетном режиме (рис. 7.14,*а*) $\varphi_д = 1$, прямой скачок уплотнения расположен непосредственно на входной кромке диффузора, а внешний поток тормозится на косых скачках уплотнения. На этом режиме диффузор имеет минимальное внешнее сопротивление $C_{x_{доп}}$.

Режим дросселирования (рис. 7.14,*б*) получается аналогично дозвуковому диффузору, т. е. повышением сопротивления на выходе и увеличением давления p_1. Это приводит к уменьшению расхода через диффузор, скачок отодвигается от передней кромки диффузора и превращается в отошедшую ударную волну. Площадь струйки $F_н$, входящей в диффузор, меньше

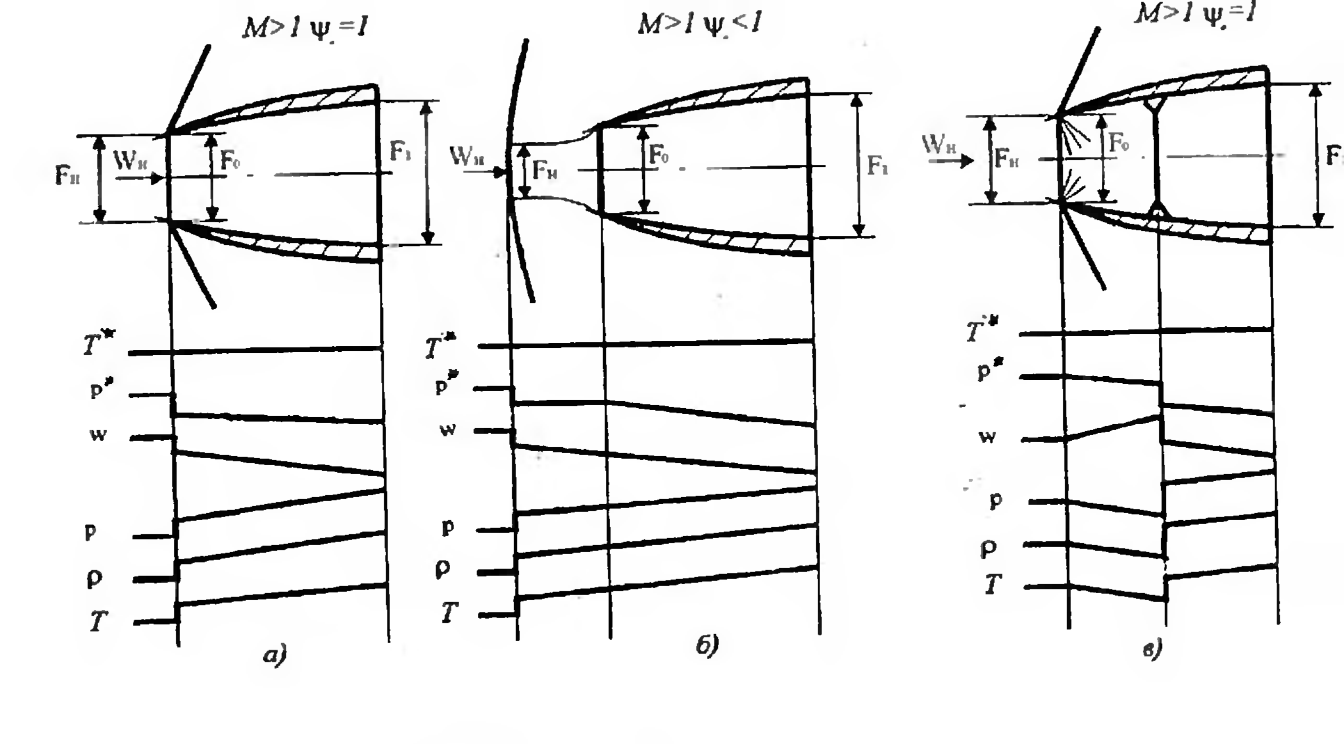


Рис. 7.14. Режимы работы односкачкового диффузора

площади входа F_0. Торможение потока частично осуществляется изоэнтропийно вне диффузора на участке между ударной волной и входом. Это обеспечивает получение значений коэффициента восстановления $\sigma_д$ и степени повышения давления $\pi_д$, больших, чем на расчетном режиме. Однако появляется дополнительное сопротивление $C_{x_{доп}} > 0$, связанное с тем, что давление p_0 больше, чем на расчетном режиме (что аналогично работе дозвукового диффузора на режиме дросселирования).

На режиме засасывания потока (рис. 7.14,*в*), обеспечиваемого снижением давления p_1 с помощью компрессора, на входе в диффузор реализуется течение Прандтля-Майера, в котором поток сначала ускоряется, а затем тормозится в более интенсивном прямом скачке уплотнения. Площадь струйки $F_н$ входящей в диффузор, равна площади F_0 входа в диффузор, и коэффициент расхода $\varphi_д = 1$. За счет повышения скоростей течения и дополнительных скачков значения $\sigma_д$ и $\pi_д$ на этом режиме меньше, чем на расчетном, но отсутствует дополнительное сопротивление $C_{x_{доп}}$.

7.3.9. Сверхзвуковые диффузоры. Данный тип диффузоров используется для работы на числах $M_н > 1{,}5$. Использование прямого скачка для сжатия и торможения потока на этих скоростях приводило бы к очень существенному снижению степени сжатия $\pi_д$ и коэффициента восстановления давления торможения $\sigma_д$, что не позволило бы реализовать цикл и получить полезную работу. Например, при $M_н = 2$ $\sigma_{ск} = 0{,}72$ для прямого скачка, а при $M_н = 3$ $\sigma_{ск} = 0{,}35$. Для снижения волновых потерь диффузора на больших сверхзвуковых скоростях используется последовательное торможение потока в системе косых скачков со слабым заключительным прямым скачком, переводящим сверхзвуковой поток в дозвуковой. Результаты расчета коэффициента восстановления $\sigma_{ск}$ для различных систем скачков показаны на рис. 7.15 [35]. n — число скачков, используемых для торможения потока. Графики показывают возможность эффективно улучшить процесс торможения за счет много-

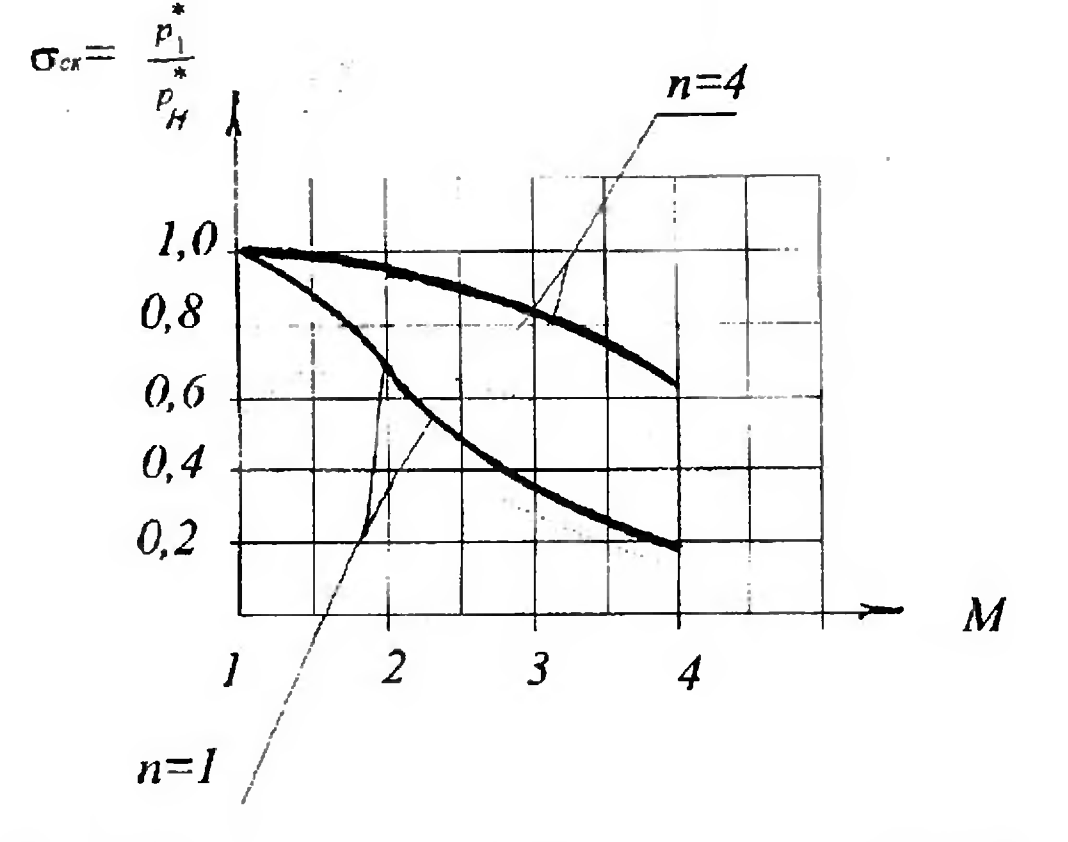


Рис. 7.15. Зависимость коэффициента восстановления давления торможения

скачковой системы. Чем больше число скачков, тем меньше потери давления торможения. Число скачков системы выбирается на основе компромисса между высоким значением $\sigma_д$, с одной стороны, и весовыми характеристиками, габаритами и возможностями регулирования — с другой.

Многоскачковая система является однорежимной системой, способной поддерживать расчетные характеристики только при постоянном скоростном режиме (т. е. при постоянном $M_н$) и очень чувствительной к изменениям расхода (режимы дросселирования). Для улучшения работы многоскачковой системы и обеспечения независимой (в определенных пределах) работы диффузора от противодавления на выходе (режимы дросселирования) сверхзвуковые диффузоры содержат две функционально различные части. Первая часть предназначена для организации процесса многоскачкового торможения, вторая обеспечивает независимость многоскачковой системы от противодавления на выходе (рис. 7.16). Газодинамически и конструктивно это реализуется следующим образом. Поскольку за замыкающим скач-

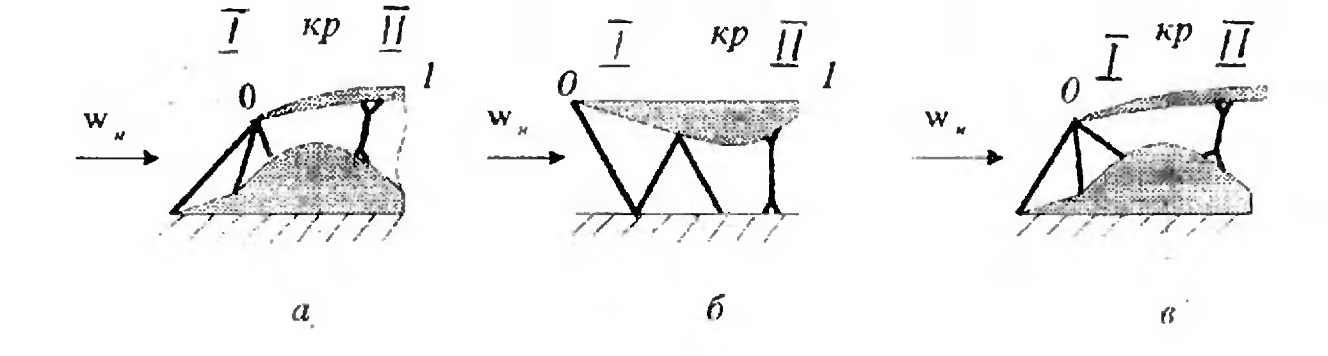


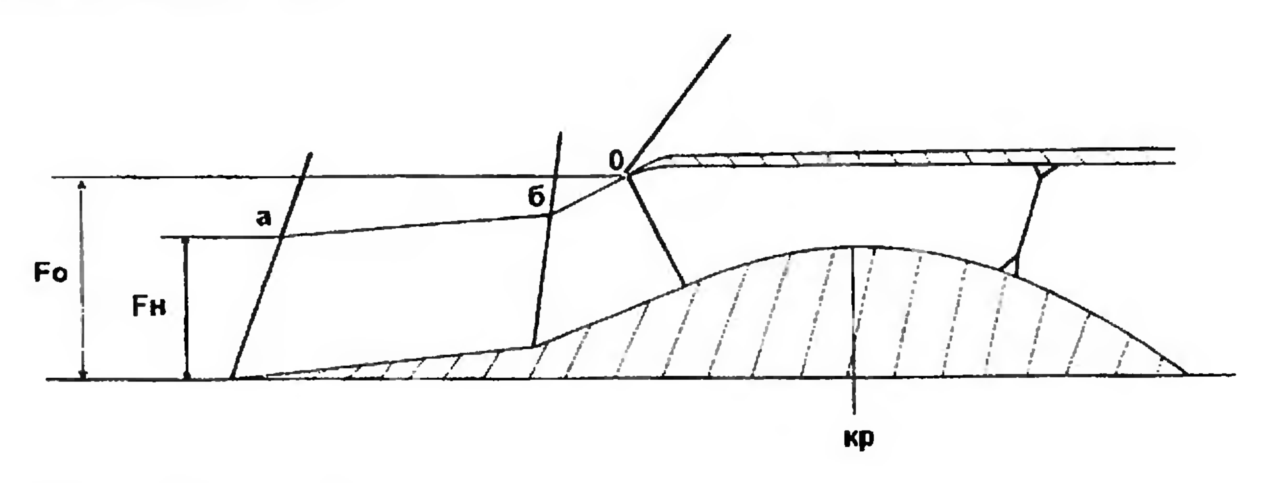
Рис. 7.16. Диффузоры с различными типами организации процесса сжатия: *а* — внешнее сжатие; *б* — внутреннее сжатие; *в* — смешанное сжатие

ком скорость дозвуковая, канал диффузора выполняется в виде сопла Лаваля с минимальным (критическим) сечением, поток за прямым скачком снова ускоряется до скорости звука в минимальном сечении и далее до сверхзвуковой скорости в расширяющейся части диффузора, обозначенной цифрой II. Здесь с помощью прямого скачка небольшой интенсивности поток переходит к дозвуковой скорости. При наличии такого регулирующего скачка повышение противодавления или его понижение за выходным сечением приводит только к перемещению скачка в расширяющейся части канала в ту или другую сторону.Так же, как на режимах работы сопла Лаваля с большим противодавлением на выходе, регулирование возможно,пока скачок не достиг критического сечения.

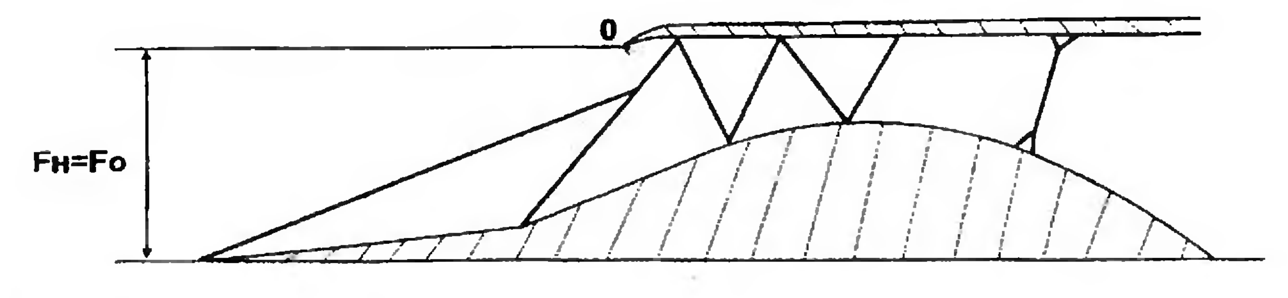
Как выбрать параметры многоскачковой системы при заданном числе скачков, чтобы обеспечить максимальное значение коэффициента восстановления давления? Исследования показывают, что максимальное значение $\sigma_{ск}$ обеспечивает система скачков одинаковой интенсивности, которая называется *оптимальной*. Для косых скачков это условие означает равенство нормальных составляющих чисел М всех скачков.

Рассмотрим работу трехскачкового диффузора на различных скоростных режимах по числу $М_н$: $М_н = М_{н\ расч}$, $М_н < М_{н\ расч}$ и $М_н > М_{н\ расч}$. Расчетным числом $М_{н\ расч}$ сверхзвукового диффузора называют число $М_н$, обеспечивающее при $\varphi_д = 1$ максимальное значение $\sigma_д$ и дополнительное сопротивление $C_{x_{доп}} = 0$. На расчетном режиме $М_н = М_{н\ расч}$ $\varphi_д = 1$ (рис. 7.17,*а*), все


а) Мн = Мрасч φд = 1




б) Мн < Мрасч φд < 1



в) Мн > Мрасч φд = 1

Рис. 7.17. Режимы работы многоскачкового диффузора

Рис. 7.17 (*г*)

скачки сходятся на кромке обечайки, $C_{x_{\text{доп}}} = 0$, $\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{д расч}}$. На рисунке показано изменение некоторых параметров для выделенной линии тока *abcde*. Поток тормозится в скачках (*abc*), разгоняется на участке *cd*, проходит критическое сечение (*d*) и далее разгоняется в расширяющейся части (*de*) до прямого скачка (*e*), за которым поток становится дозвуковым. При этом в сечении I давления $p_1 = p_{\text{вых}}$ за диффузором.

На нерасчетном режиме по скорости $M_{\text{н}} < M_{\text{н расч}}$, полученном снижением скорости набегающего потока (рис. 7.17,*б*), углы наклона α скачков к вектору скорости увеличиваются и скачки отходят от кромки обечайки. При этом площадь струйки *або* $F_{\text{н}}$, входящей в диффузор, меньше F_0 и коэффициент расхода $\varphi_{\text{д}} < 1$. Так как за отошедшими скачками повышенное давление действует на лобовую часть диффузора, появляется дополнительное сопротивление $C_{x_{\text{доп}}} > 0$. Потери в скачках *а,б,о* меньше (из-за уменьшения скорости). Очевидно, должно соблюдаться уравнение неразрывности

$$p_{\text{н}}^* \, q(\lambda_{\text{н}}) \, F_{\text{н}} = p_{\text{кр}}^* \, q(\lambda_{\text{кр}}) \, F_{\text{кр}} = p_{\text{н}} \, y(\lambda_{\text{н}}) \, F_{\text{н}} \qquad (7.50)$$

для сечения входящей струйки и критического сечения диффузора. Однако при уменьшении $M_{\text{н}}$ $y(\lambda_{\text{н}})$ уменьшается, и в минимальном сечении скорость станет дозвуковой, а регулировочный скачок вовсе исчезнет. В пределе диффузор перейдет на работу с выбитой ударной волной *∂bc* (см. рис. 7.17,*г*). В этом

случае $\sigma_д$ окажется меньше $\sigma_{д\ расч}$, и еще сильнее возрастет $C_{x_{доп}}$. Если этого не произойдет, то в области критического сечения возникает сложная волновая структура отраженных скачков, аналогичная показанной на рис. 7.17,*в* для другого режима. И в этом случае $\sigma_д$ будет меньше $\sigma_{д\ расч}$.

Нерасчетный режим по скорости $M_н > M_{н\ расч}$ реализуется увеличением скорости набегающего потока (рис. 7.17,*в*). Углы наклона скачков к вектору скорости уменьшаются, скачки отходят от кромки обечайки и попадают внутрь диффузора, вызывая сложную структуру отраженных скачков. Кромка диффузора 0 дает центрированную волну разрежения в течении Прандтля-Майера, которая взаимодействует со скачком уплотнения. При этом коэффициент расхода $\varphi_д = 1$, исчезает дополнительное сопротивление $C_{x_{доп}} = 0$, но $\sigma_д < \sigma_{д\ расч}$.

Обеспечение режима работы диффузора требует выполнения граничного условия по давлению $p_1 = p_{вых}$, поскольку течение на выходе из диффузора дозвуковое: $M_1 < 1$. Тогда соотношение (7.50) следует записать как

$$p_н^* \, q(\lambda_н) F_н = p_{кр}^* \, q(\lambda_{кр}) F_{кр} = p_н \, y(\lambda_н) F_н =$$

$$= p_1 \, y(\lambda_1) F_1 = p_1^* \, q(\lambda_1) F_1. \tag{7.51}$$

Рассмотрим один из режимов дросселирования диффузора путем повышения давления на выходе $p_{вых}$ (увеличение сопротивления). Пусть $M_н = M_{н\ расч}$ (рис. 7.17,*а*). Увеличение $p_{вых}$ сначала будет приводить к перемещению регулировочного прямого скачка в сторону критического сечения. При этом система расчетных внешних скачков сохраняется и $\sigma_д$ даже несколько увеличивается за счет уменьшения потерь в прямом скачке. При дальнейшем росте $p_{вых}$ (и p_1) регулировочный скачок, проходя критическое сечение, исчезает, перед диффузором появляется выбитая ударная волна, дополнительное сопротивление $C_{x_{доп}}$ и уменьшение $\sigma_д$ и $\varphi_д$.

Улучшение характеристик диффузора путем повышения $\sigma_д$ в принципе возможно за счет увеличения числа скачков и превращения их в слабые волны сжатия-характеристики. Тогда процесс будет изоэнтропным, а диффузор будет также называться изоэнтропным. Течение в этом случае соответствует обращенному течению Прандтля-Майера, в котором поверхность торможения выполнена по линии тока. Однако реализация изоэнтропного диффузора наталкивается на целый ряд трудностей, главной из которых является наличие пограничного слоя на поверхностях обтекания.

7.3.10. Об учете реальных свойств течения и рабочего тела в диффузорах. Рассмотренная выше теория диффузоров качественно верно, а в некоторых случаях — количественно точно позволяет рассчитать параметры течения и геометрию канала. Вместе с тем влияние двумерности, граничных условий и необратимости в диффузорах более существенно, чем в соплах. Это объясняется тем, что в диффузорах идет процесс торможения, который для сверхзвуковых течений сопровождается образованием ударных вол. Положение усугубляется тем, что пограничный слой в градиентном потоке диффузора и в, частности, при взаимодействии со скачками уплотнения имеет повышенную склонность к отрыву.

"Однорежимность" диффузора, связанная с нарушением условий уравнения неразрывности,влияние граничного условия по давлению на выходе приводят к необходимости *регулирования диффузора*. Цели регулирования — согласование расхода на различных режимах, удерживание оптимальной системы скачков для обеспечения $\varphi = 1$ $\sigma = \sigma_{max}$ и $C_{x_{доп}} = 0$, предотвращение неустойчивых режимов пульсации расхода (так называемого "помпажа") и согласование граничного условия на выходе. Для этого используют регулирование иглы диффузора как по положению, так и по проходному сечению канала с изменением наклона отклоняющих поверхностей, перепуск воздуха и отсос пограничного слоя, изменение минимального сечения и др. [36, 37].

7.4.1. Сопротивление. Жидкость, движущаяся относительно поверхности обтекаемого тела (или тело, движущееся относительно жидкости), взаимодействует с этой поверхностью, результатом чего является возникновение сил взаимодействия и энергетических эффектов взаимодействия. Главный вектор, или вектор суммы всех сил, обычно разлагается на две составляющие: направление движения и направление нормали к вектору скорости [38]. *Силой сопротивления* $P_{\text{сопр}}$ называется составляющая главного вектора нормальных и касательных сил, действующих на поверхности тела по направлению, противоположному скорости движения. На преодоление силы сопротивления жидкость, движущаяся в канале, или тело, движущееся в жидкости, тратит свою полезную энергию (работоспособность, или эксергию). Для жидкости эти потери работоспособности (эксергии) реализуются уменьшением полного давления, или давления торможения, p^*. В зависимости от конкретного устройства или задачи величина потерь давления торможения оценивается либо абсолютной величиной уменьшения

$$\Delta p^* = p_1^* - p_2^*, \tag{7.52}$$

где p_1^*, p_2^* — давление торможения соответственно в начале и конце процесса, либо относительной величиной

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*}. \tag{7.53}$$

В общем случае составляющими сопротивления являются сопротивление давления и сопротивление трения.

Рассмотрим некоторые случаи определения потерь давления торможения.

7.4.2. Гидравлические потери. Потери давления торможения в энергетически изолированном течении жидкости называют *гидравлическими потерями*.

Различают два вида гидравлических потерь:

1) местные;

2) потери на трение в прямых каналах постоянного сечения (линейные потери).

К *местным потерям* относят потери на внезапное или плавное расширение или сужение канала, поворот канала, краны, дроссели и т. п.

Местные потери $\Delta p^*_{\text{м}}$ подсчитываются по формуле Вейсбаха [2]:

$$\Delta p^*_{\text{м}} = r_i \frac{\rho w_i^2}{2}, \tag{7.54}$$

где w_i — среднемассовая скорость в сечении i канала; ρ — плотность жидкости; r_i — коэффициент местного сопротивления, зависящий от вида сопротивления (формы) скоростного и гидродинамического режимов, определяемых M и Re.

Линейные потери $\Delta p^*_{\text{м}}$ подсчитываются по формуле Дарси-Вейсбаха [2]:

$$\Delta p^*_{\text{л}} = \xi_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}, \tag{7.55}$$

где l — длина канала; d — диаметр канала; l/d — длина канала в калибрах; w — среднемассовая скорость; ρ — плотность жидкости; $\xi_{\text{тр}}$ — коэффициент сопротивления трения, зависящий от критериев скоростного и гидравлического режима M и Re и относительной шероховатости стенок канала k/d. Здесь k — средняя высота гребешков шероховатости [39].

7.4.3. Назначение камеры сгорания. Камера сгорания предназначена для подвода энергии в форме тепла к предварительно сжатому газу. Подвод тепла, как правило, производится путем сжигания топлива в атмосфере воздуха, используемого в качестве рабочего тела. Основными газодинамическими процессами, определяющими работу камеры, являются процессы смешения, горения, подвода тепла, подвода массы и преодоления гидравлического сопротивления при течении газа.

Некоторые аспекты течения газа с подводом тепла (тепловые скачки) в детонационных волнах рассматривались в разд. 5.7. Здесь рассмотрим процессы непрерывного и стационарного под-

вода тепла, массы и движение в цилиндрической трубе с трением, моделирующими разные аспекты течения в камере сгорания. Процессы смесеобразования, горения и другие, характерные для камер сгорания ВРД, обычно рассматриваются в специальных курсах.

7.4.4. Тепловое воздействие. Процессы с тепловым воздействием (подводом или отводом тепла) связаны не только с сжиганием топлива, но имеют место в различных теплообменных аппаратах, системах охлаждения стенок камер и др. Кроме того, тепловое воздействие можно использовать для разгона потока до сверхзвуковых скоростей, т. е. реализовать *тепловое сопло*. Пусть имеется цилиндрический канал (рис. 7.19), на входе в который известны все параметры: T_0^*, p_0^*, p_0, T_0, F_0, M_0 (λ_0), а также теплофизические характеристики рабочего тела (газа) k, C_p, R. Газ полагаем совершенным и идеальным, т. е. коэффициент вязкости $\mu = 0$. На газ оказывается тепловое воздействие $dq_н$ в виде подвода или отвода тепла. Необходимо определить изменение параметров в зависимости от количества тепла $q_н$. Параметры в текущем сечении обозначим индексом *1*. В качестве газодинамической системы примем объем рабочего тела, заключенный между сечениями *0* и *1* и поверхностью канала. Анализ системы позволяет сделать вывод, что система энергетически не изолирована, т. е. $dq_н \neq 0$, процесс не изоэнтропийный: $dS \neq 0$. Для рассматриваемого случая поведение системы будет определяться следующими уравнениями:

$$(M^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{k-1}{a^2}\,dq_н\,; \tag{7.56}$$

$$dq_н = C_р\,dT^*\,; \tag{7.57}$$

$$\frac{dp^*}{p^*} = -kM^2\,\frac{k-1}{k+1}\,\frac{dq_н}{a_{кр}^2}\,; \tag{7.58}$$

$$(M^2 - 1)\frac{dM^2}{M} = (1 + kM^2)\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{dT^*}{T^*}\,, \tag{7.59}$$

которые могут быть получены на основе газодинамической модели элементарной струйки (см. гл. 4).

Анализ приведенных уравнений обнаруживает два важнейших явления, на которые впервые в 1946 г. указал Г.Н. Абрамович [9]: *тепловой кризис и тепловое сопротивление*. Рассмотрим их подробнее. Из (7.59) и (7.57) следует, что при $M_0 < 1$, т. е. в дозвуковом потоке, при $dq_н > 0$ (т. е. при подводе тепла) число M_1 будет увеличиваться до критического значения $M_1 = 1$, после которого стационарное течение с подводом тепла станет невозможным. Канал оказывается запертым и при дальнейшем подводе тепла начнет уменьшать расход газа и значение M_0. Это явление получило название *теплового кризиса*. Аналогичная ситуация будет иметь место при $M_0 > 1$, с той лишь разницей, что подвод тепла будет уменьшать M_1 до $M_1 = 1$. Из рассмотрения явления теплового кризиса следует, что количество тепла $q_н$, которое можно подвести к движущемуся газу, ограниченно и определяется только значением критериев M_0 и λ_0.

Обозначим температуру торможения, определяющую значение предельно возможного подогрева, $T^*_{1\,кр}$. Тогда

$$\Theta_{кр} = \frac{T^*_{1\,кр}}{T^*_0} \tag{7.60}$$

будет определять предельно возможный подогрев при заданном значении T^*_0 начальной энергии рабочего тела. Используя уравнение количества движения в газодинамической форме (4.85) с учетом того, что для цилиндрической трубы $P_x = 0$, и выражая $a_{кр}$ через T^*, из (4.41) получим соотношение для $\theta_{кр}$:

$$\Theta_{кр} = \frac{T^*_{1кр}}{T^*_0} = \frac{[z\,(\lambda_0)]^2}{\left[z\,(\lambda_{1\,кр})\right]^2} = \frac{[z\,(\lambda_0)]^2}{4}\,. \tag{7.61}$$

График, иллюстрирующий формулу (7.61), показан на рис. 7.18 (кривая *1*). Реализуемая область подогрева лежит ниже

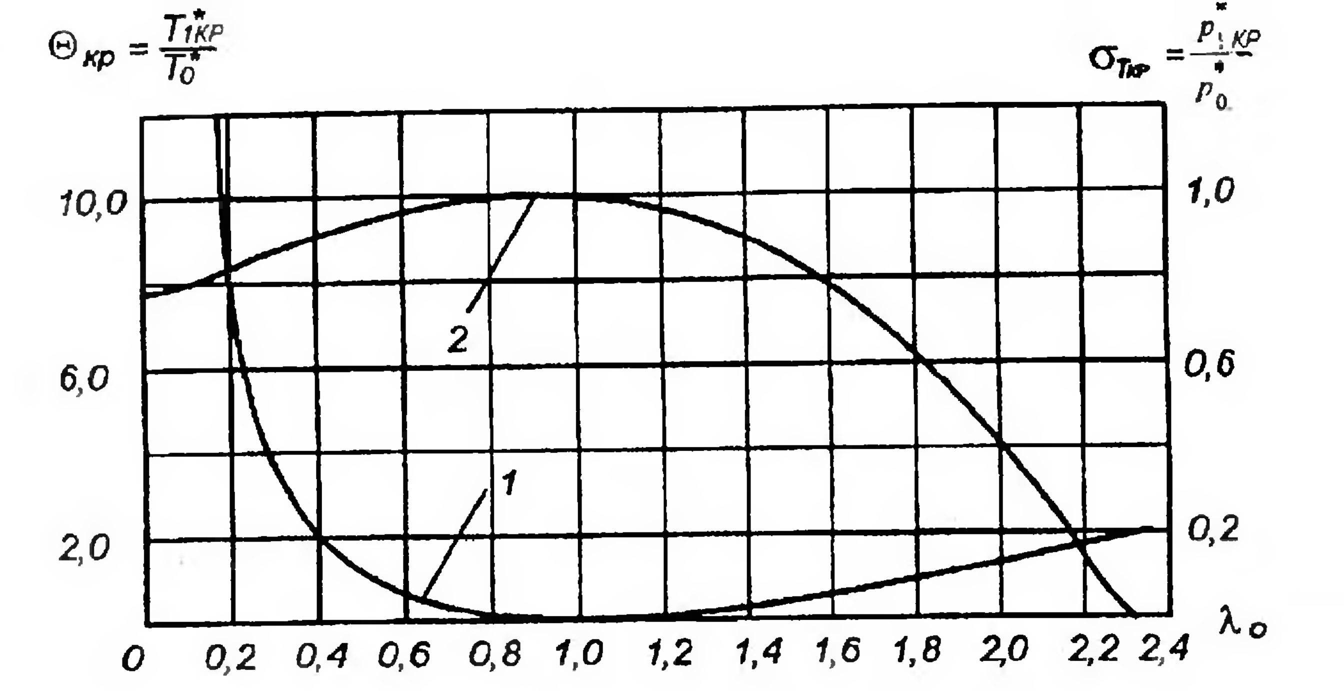


Рис. 7.18. Зависимость критического подогрева и критического теплового сопротивления от λ_1

кривой $\Theta_{кр} = \Theta(\lambda_0)$. При отходе λ_0 от критического значения $\lambda_1 = 1$ диапазон возможного подогрева существенно расширяется, в особенности на дозвуковых режимах. Для предотвращения запирания камеры приходится снижать λ_0, что для дозвуковых камер ТРД приводит к увеличению габаритов и массы.

Из уравнений (7.58) и (7.57) следует, что при подводе тепла к движущемуся газу (M> 0) полное давление, или давление торможения, p^* будет уменьшаться, т. е. $dp^* < 0$. По аналогии с гидравлическим сопротивлением уменьшение давления торможения p^* при подводе тепла получило наименование *теплового сопротивления*, величина которого оценивается как

$$\sigma_т = \frac{p^*_1}{p^*_0}. \qquad (7.62)$$

Аналогично критическому подогреву, используя уравнение количества движения в газодинамической форме (4.86) для величины $\sigma_{т\,кр}$ *критического теплового сопротивления* (максимально возможного снижения давления торможения в результате подвода тепла к движущемуся газу) получим (для воздуха)

$$\sigma_{\text{т кр}} = \frac{p^*_{1\ \text{кр}}}{p^*_0} = \frac{f(\lambda_0)}{f(\lambda_{1\ \text{кр}})} = \frac{f(\lambda_0)}{1{,}267}. \qquad (7.63)$$

График зависимости $\sigma_{\text{т кр}} = \sigma(\lambda_0)$ показан на рис. 7.18, кривая *2*. Минимальные потери ($\sigma_{\text{т кр}} = 1$) соответствуют отсутствию подогрева ($\Theta = 1,\ \lambda_0 = 1$).

Физически явление теплового сопротивления объясняется потерей работоспособности, или эксергии, так что при подводе энергии в форме тепла полезная часть энергии (эксергия) оказывается меньше на величину $\nabla\, l^{\max}_{\text{полез}} = T_0\,(s_2 - s_1)$ (2.91). Это связано с тем, что тепловая энергия не может быть полностью превращена в работу.

Для расчета параметров в любом сечении *1* цилиндрической трубы при тепловом воздействии одного знака может быть использована газодинамическая модель струйки, некоторые уравнения которой могут быть несколько упрощены.

1. Уравнения неразрывности:

$$\frac{p^*_0\, q(\lambda_0)}{\sqrt{T^*_0}} = \frac{p^*_1\, q(\lambda_1)}{\sqrt{T^*_1}};$$

$$\rho_0 w_0 = \rho_1 w_1. \qquad (7.64)$$

2. Уравнения энергии:

$$q_{\text{н}} = C_p\,(T^*_1 - T^*_0). \qquad (7.65)$$

3. Уравнения количества движения:

$$p^*_0\, f(\lambda_0) = p^*_1\, f(\lambda_1); \qquad (7.66)$$

$$T^*_0 \left[z(\lambda_0)\right]^2 = T^*_1 \left[z(\lambda_1)\right]^2; \qquad (7.67)$$

$$p_0\, r(\lambda_1) = p_1\, r(\lambda_0). \qquad (7.68)$$

4. Уравнения состояния:

$$\rho^*_0 = \frac{p^*_0}{RT^*_0}; \qquad \rho^*_1 = \frac{p^*_1}{RT^*_1}.$$

5. Уравнения для расчета статических температуры и плотности:

$$T_0 = T_0^* \tau(\lambda_0); \qquad \rho_0 = \rho_0^* \varepsilon(\lambda_0);$$

$$T_1 = T_1^* \tau(\lambda_1); \qquad \rho_1 = \rho_1^* \varepsilon(\lambda_1).$$

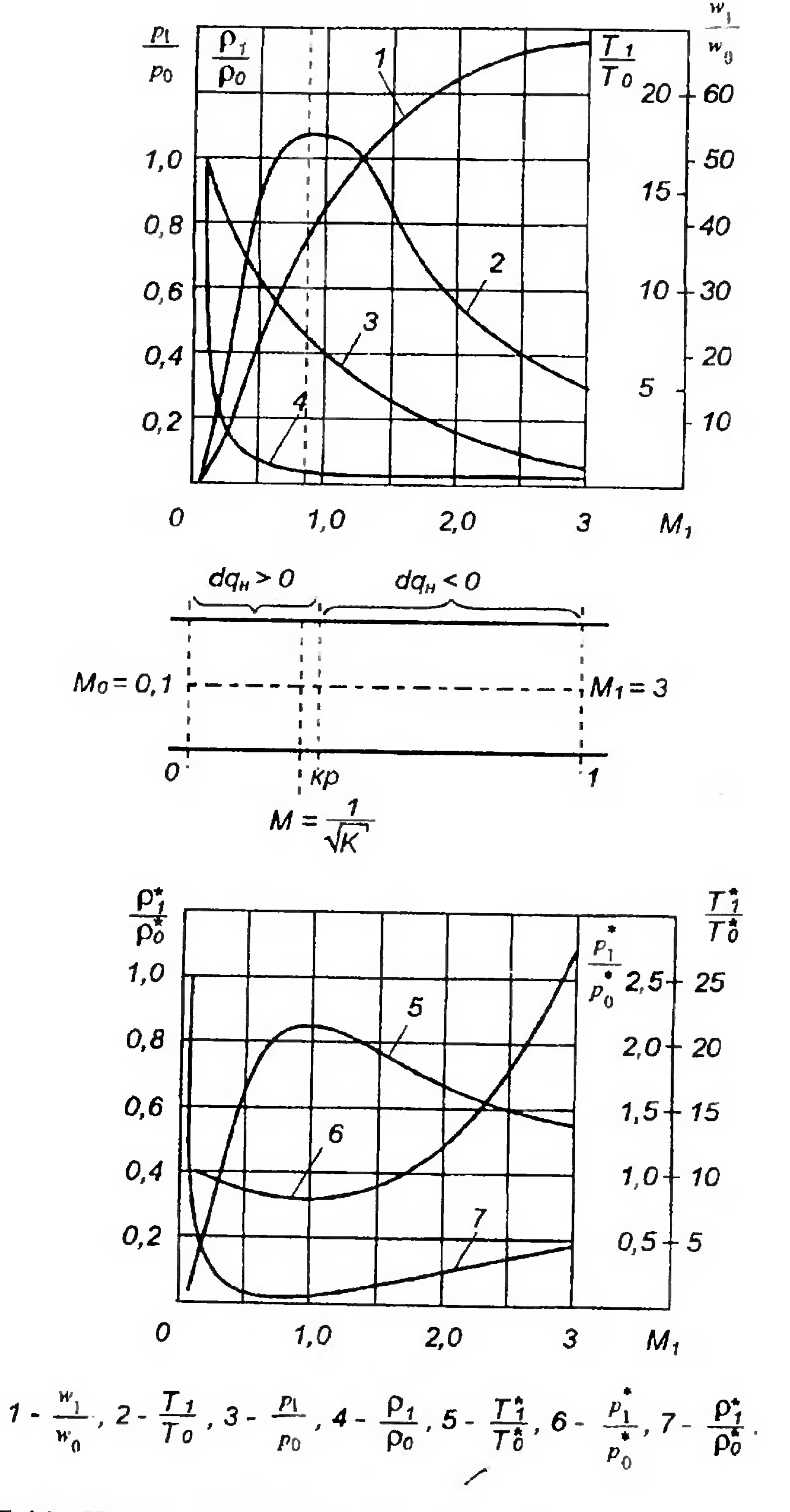
Изменение параметров состояния в цилиндрической трубе, используемой в режиме теплового сопла, т. е. устройства для разгона газа, рассчитанное на основе уравнений (7.64), (7.68), приведено на рис. 7.19.

Расчеты показывают еще одну интересную особенность данного течения: уменьшение статической температуры газа T при подводе тепла в диапазоне скоростей от $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$ до $M = 1$. Т. е. существует предельное (максимальное) значение статической температуры в точке скоростного режима $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$, относительное значение которой $\frac{T_{1max}}{T_0}$ определяется только значением числа M_0 или λ_0 в начальном сечении. Можно показать [26], что

$$\frac{T_{1max}}{T_0} = \frac{(1 + kM_0^2)^2}{4kM_0^2} = \frac{k+1}{8k\lambda_0^2} \frac{(1+\lambda_0^2)^2}{1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda_0^2}. \tag{7.69}$$

График функции $\frac{T_{1max}}{T_0}$ показан на рис. 7.20. Полученный результат достаточно просто пояснить, используя *метод политропы*, с помощью которого описываются различные процессы в термодинамике [26]. Запишем уравнения Бернулли, неразрывности и политропического процесса

$$\frac{dp}{\rho} = -w\,dw; \tag{7.70}$$



1 - $\frac{w_1}{w_0}$, 2 - $\frac{T_1}{T_0}$, 3 - $\frac{p_1}{p_0}$, 4 - $\frac{\rho_1}{\rho_0}$, 5 - $\frac{T_1^*}{T_0^*}$, 6 - $\frac{p_1^*}{p_0^*}$, 7 - $\frac{\rho_1^*}{\rho_0^*}$.

Рис. 7.19. Изменение параметров при тепловом воздействии для $M_1 = 0,1$ и $k = 1,4$

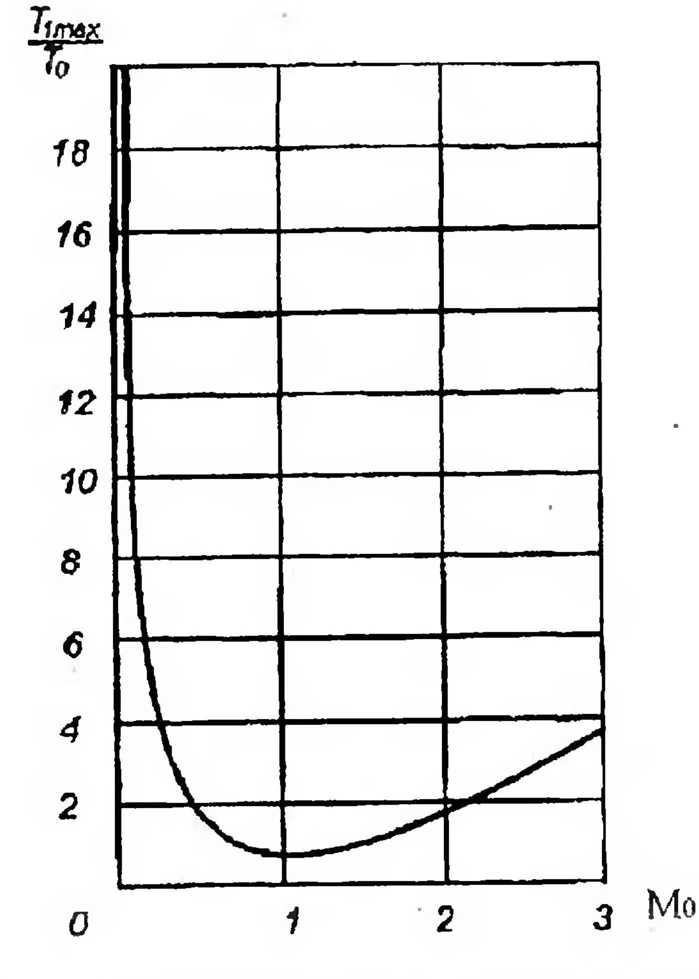


Рис. 7.20. Зависимость максимальной статической температуры газа в тепловом сопле от значения числа M_0 на входе

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dw}{w}; \qquad (7.71)$$

$$\frac{dp}{d\rho} = n\frac{p}{\rho}. \qquad (7.72)$$

Исключая dw из системы (7.70)—(7.72), с учетом уравнений состояния $\frac{p}{\rho} = RT$ и выражений для скорости звука и числа Маха $a^2 = kRT$, $M = \frac{w}{a}$ получим для показателя политропы

$$n = kM^2. \qquad (7.73)$$

В области $0 < n < 1$ и $0 < M < \sqrt{\frac{1}{k}}$ подводимое тепло идет на увеличение энтальпии и кинетической энергии, при этом температура растет.

В сечении $n = 1$ и $\mathrm{M} = \sqrt{\frac{1}{k}}$ процесс изотермичен и температура достигает максимума, а все тепло идет на увеличение кинетической энергии.

В области $1 < n < k$ кинетическая энергия увеличивается как за счет тепла, так и за счет уменьшения энтальпии. При этом температура уменьшается, сказывается увеличение сжимаемости газа.

В сечении $n = k$ и $\mathrm{M} = 1$ нет теплообмена, оно соответствует кризису.

В области $n > k$ и $\mathrm{M} > 1$ увеличение кинетической энергии и отвод тепла происходят за счет уменьшения энтальпии (уменьшения температуры).

Следует отметить, что для реализации рассматриваемого течения, т. е. течения газа с ускорением, необходима сила в виде перепада давления (достаточное условие изменения состояния, см. разд. 4.6.3),причем должны выполняться граничные условия по давлению (2.12).

7.4.5. Воздействие трения. Рассмотрим движение газа с трением в цилиндрической трубе при отсутствии всех других воздействий. Газодинамическую систему выберем аналогично течению с теплоподводом как рабочее тело, заключенное внутри цилиндрической трубы между двумя сечениями *0-0* (начальным) и *1-1* (конечным), рис. 7.20. Таким образом, система энергетически изолирована, процесс необратимый и температура торможения не изменяется, $T^* = \mathrm{const}$, а давление торможения p^* уменьшается в соответствии с соотношением (4.100) для рассматриваемого случая:

$$\frac{dp^*}{p^*} = -\frac{k}{a^2}\, dl_{\text{тр}}\,.$$

Уравнения закона обращения воздействий (4.96) и (4.101) для рассматриваемого случая имеют вид:

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{dw}{w} = -\frac{k}{a^2}\, dl_{\text{тр}}\,; \tag{7.74}$$

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\,\frac{dp}{p} = k\,\frac{1 + (k-1)\,\mathrm{M}^2}{a^2}\,dl_{тр}\,. \qquad (7.75)$$

Как было отмечено выше, воздействие трения является односторонним, т. е. $dl_{тр} > 0$ всегда и не может менять знак. Поэтому из (7.74) и (7.75) следует, что в дозвуковом потоке скорость w всегда будет возрастать, а статическое давление p — уменьшаться; в сверхзвуковом потоке скорость w уменьшается, а статическое давление p растет.

Следует отметить, что условия закона обращения воздействия являются необходимыми, поэтому для реализации течения условия течение должны удовлетворять граничному условию по давлению $p_{вх} = p_0$ и $p_1 = p_{вых}$, для выполнения которых должен быть обеспечен перепад давления (см. (2.12) и разд. 4.6.3): $\Delta p = p_0 - p_1$.

Рассмотрим случай реализации течения с воздействием трения за счет линейных гидравлических потерь (см. разд.7.4.2). Тогда в соответствии с уравнением Дарси-Вейсбаха (7.55)

$$dl_{тр} = \zeta_{тр}\,\frac{dx}{D}\,\frac{w^2}{2}\,, \qquad (7.76)$$

где x — координата, отсчитываемая вдоль оси канала от сечения 0, а D — диаметр канала.

Используя соотношение (4.48), связывающее число M и λ,

$$\mathrm{M}^2 = \frac{\dfrac{2}{k+1}\,\lambda^2}{1 - \dfrac{k-1}{k+1}\,\lambda^2}\,, \qquad (7.77)$$

подставим их вместе с (7.59) в (7.57). В результате после преобразований получим

$$\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\lambda}{\lambda^3} = -\,\frac{k}{k+1}\,\frac{\zeta_{тр}}{D}\,dx. \qquad (7.78)$$

Для большинства практически важных турбулентных течений газа в шероховатых трубах коэффициент трения $\zeta_{тр}$ в первом приближении можно принять постоянным. В общем случае

коэффициент трения $\zeta_{тр}$ зависит от числа Re и относительной шероховатости (см. разд. 7.4.2). Тогда уравнение (7.78) можно проинтегрировать в пределах от λ_0 до λ_1 и от 0 до x. В результате получим

$$\left(\frac{1}{\lambda_0^2} + \ln \lambda_0^2\right) - \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2\right) = \frac{2k}{k+1}\frac{\zeta_{тр}}{D}x. \quad (7.79)$$

Введем следующие обозначения [2]:

$$\left(\frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda\right) = \varphi(\lambda) \quad (7.80)$$

— газодинамическая функция, характеризующая течение с трением;

$$\frac{2k}{k+1}\frac{\zeta_{тр}}{D}x = l_{тр} \quad (7.81)$$

— приведенная длина трубы.

Тогда уравнение (7.81), можно записать как

$$\varphi(\lambda_0) - \varphi(\lambda_1) = l_{тр}. \quad (7.82)$$

График газодинамической функции $\varphi(\lambda)$ показан на рис. 7.21 [2].

Уравнение (7.82) позволяет рассчитать значения λ_1 на выходе из трубы в зависимости от λ_0 на входе и приведенной длины трубы. В частности, можно определить *критическую длину трубы* $l_{тр\ кр}$, соответствующую значению $\lambda_1 = 1$, т. е.

$$l_{тр\ кр} = \varphi(\lambda_1) - 1. \quad (7.83)$$

Результаты расчетов по уравнению (7.81) показаны на рис. 7.22 в виде функции $\lambda_1 = f(\lambda_0, l_{тр})$. Значения λ_0 соответствуют $l_{тр} = 0$, т. е. они являются исходными точками соответствующих кривых. Значения $\lambda_1 = 1$ определяют критическую длину трубы $l_{тр\ кр}$, при которой канал оказывается "запертым" — это явление кризиса для течения с воздействием трения.

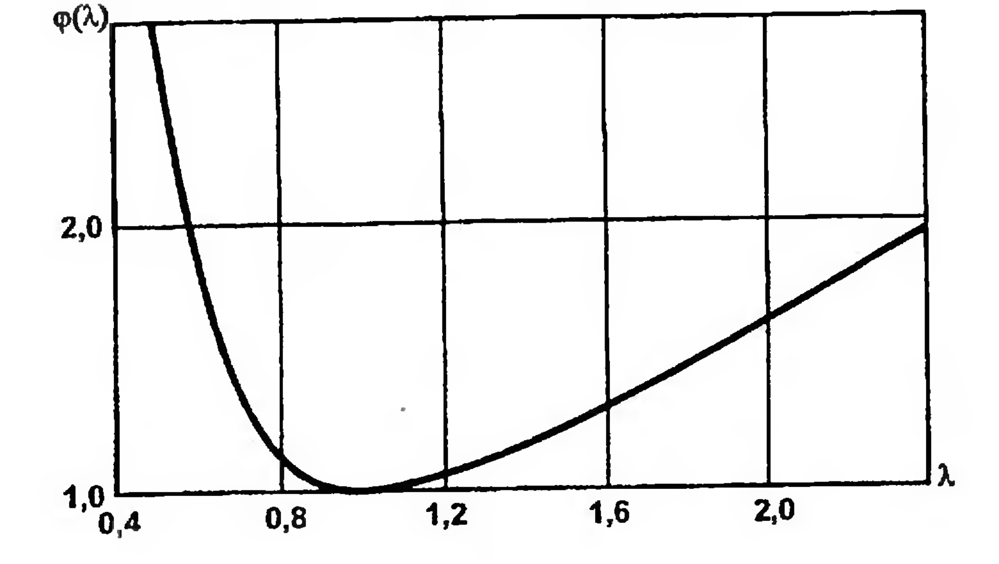


Рис. 7.21. Газодинамическая функция $\varphi(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2} + \ln \chi^2$

График рис. 7.22 выражает необходимое условие для реализации различных режимов. Реализуемость течения определяют достаточные условия по давлению. Потери давления торможе-

Рис. 7.22. Зависимость $\lambda_1 = f(\lambda_0, l_{тр})$

ния $\sigma = \frac{p_0^*}{p_1^*}$ легко определяются из уравнения неразрывности в газодинамической форме:

$$\sigma = \frac{p_0^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_0)}{q(\lambda_1)}, \tag{7.84}$$

а статические давления связаны соотношением

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{y(\lambda_0)}{y(\lambda_1)}. \tag{7.85}$$

Тогда располагаемый перепад давления $\pi_{\text{расп}}$, соответствующий достаточному условию,

$$\pi_{\text{расп}} = \frac{p_0^*}{p_1} = \frac{y(\lambda_1)}{q(\lambda_0)}. \tag{7.86}$$

Таким образом, течение в цилиндрическом канале с трением определяется уравнениями (7.82), (7.86) и граничными условиями по давлению.

Рассмотрим на основе анализа этих соотношений возможные режимы течения. Пусть $\lambda_0 < 1$, т. е. течение на входе дозвуковое (кривые *1-5* на рис. 7.22). Если удовлетворяется условие по давлению (7.86), то с ростом $l_{\text{тр}}$ вплоть до $l_{\text{тр}} = l_{\text{тр кр}}$ скорость на выходе из трубы возрастает вплоть до $\lambda_1 = 1$. Дальнейшее увеличение $l_{\text{тр}} > l_{\text{тр кр}}$ "перемещает" сечение с $\lambda_1 = 1$ вслед за ростом $l_{\text{тр}}$, при этом уменьшается λ_0 на входе в канал (режим последовательно переходит от *5* к *1* на рис. 7.22).

Если условие по давлению не удовлетворяется, располагаемый перепад меньше необходимого, то увеличение $l_{\text{тр}}$ будет приводить к уменьшению λ_0 (и расхода), при этом давление на выходе из трубы $p_1 = p_{\text{вых}}$ и $\lambda_1 < 1$.

Пусть $\lambda_0 > 1$, т. е. течение на входе сверхзвуковое (кривые *6-8* на рис. 7.22). Увеличение $l_{тр}$ до $l_{тр} = l_{тр\,кр}$ уменьшает скорость до $\lambda_1 = 1$, если условие по давлению выполняется. В противном случае (невыполнение условия по давлению) возможны следующие варианты. Если $\pi_{расп} > \pi_{дост}$, то режим реализуется в сечении $l_{тр} = l_{тр\,кр}$ и давление $p_1 > p_{вых}$, т. е. $\lambda_1 = 1$. Если $\pi_{расп} < \pi_{дост}$, то в канале возникает волновая структура, близкая к прямому скачку уплотнения, переводящая сверхзвуковой поток в дозвуковой в соответствии с основным кинематическим соотношением для прямого скачка $\lambda_a \lambda_\delta = 1$ (кривая *8* на рис. 7.22), далее поток начинает разгоняться в дозвуковом течении, реализуя выполнение граничного условия $p_1 = p_{вых}$. При этом положение и интенсивность скачка обеспечивают выполнение граничного условия по давлению.

Аналогичный результат получается, если условие по давлению (7.86) выполняется при $\lambda_0 > 1$, а длина канала $l_{тр} > l_{тр\,кр}$. В этом случае сверхзвуковой поток вынужден (так как из-за снижения плотности из-за дополнительной работы трения через сечение не проходит прежний расход) скачком (кривая *8* на рис. 7.22) переходить на дозвуковой режим. Далее течение развивается так же, как и в предыдущем случае нарушения условия по давлению: $\pi_{расп} < \pi_{дост}$.

7.4.6. Расходное воздействие. Расходное воздействие на газовый поток заключается в подводе $dG > 0$ или отводе $dG < 0$ массы газа. Полагая канал для расходного воздействия цилиндрическим, такое воздействие можно организовать подачей или отводом массы через перфорированные стенки. Если масса воздействия dG обладает параметрами $T_в$, $w_в$ (а также, возможно, теплофизическими характеристиками, отличными от параметров основного потока), то воздействие носит сложный характер: оно эквивалентно геометрическому, тепловому воздействию и воздействию технической работой и трением. При одинаковых теплофизических характеристиках C_p, R, k с основным потоком уравнение обращения воздействий для случая только расходного воздействия имеет вид (4.97):

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\left[\frac{T_{в}}{T} + k\mathrm{M}^2\left(1 - \frac{w_{тв}}{w}\right) + \frac{(k-1)\,\mathrm{M}^2}{2}\left(1 - \frac{w_{в}^2}{w^2}\right)\right]\frac{dG}{G},$$

где $T_{в}$ — температура массы dG; $w_{в}$ — скорость массы dG; $w_{тв}$ — проекция вектора скорости массы dG на направление вектора скорости основного потока.

Член уравнения $T_{в}/T$ при $T_{в} = T$ оказывает геометрическое воздействие, а при $T_{в} \neq T$ — еще и тепловое воздействие на основной поток; $k\mathrm{M}^2\left(1 - \frac{w_{тв}}{w}\right)$ оказывает воздействие, аналогичное технической работе $dl_{тех}$, изменяя количество движения основного потока; $\frac{(k-1)\,\mathrm{M}^2}{2}\left(1 - \frac{w_{в}^2}{w}\right)$ оказывает энергетическое и воздействие трения (процесс смешения при разных скоростях). В частном случае равенства параметров $T_{в} = T$, $w_{тв} = w$, $w_{в} = w$ уравнение (4.97) имеет вид

$$(\mathrm{M}^2 - 1)\frac{dw}{w} = -\frac{dG}{G}, \tag{7.87}$$

оно фактически эквивалентно геометрическому воздействию и реализует течение с переменной плотностью тока. На практике этот случай реализуется при отборе газа из потока и позволяет регулировать скорость сверхзвукового потока без образования скачков уплотнения. Для этого случая течения параметры торможения T^*, p^*, ρ^* и $a_{кр}$ не изменяются, а связь параметров определяется уравнением непрерывности в виде

$$q(\lambda_1) = q(\lambda_0)\frac{G_1}{G_0}, \tag{7.88}$$

где

$$G_1 = G_0 \pm \Delta G. \tag{7.89}$$

Индекс 0 относится к начальному сечению, индекс 1 — к текущему (рис. 7.23). Управляя подводом и отводом массы, можно организовать сверхзвуковое расходное сопло. Для этого

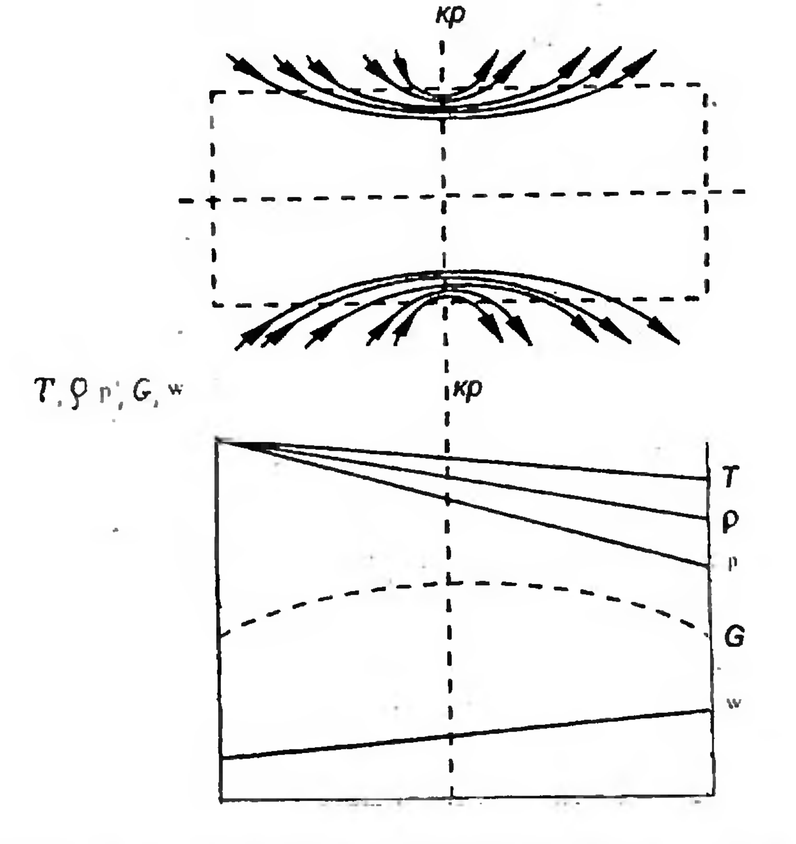


Рис. 7.23. Сверхзвуковое расходное сопло

необходимо обеспечить критический расход подводимой массы $\Delta G_{кр}$, т. е. расход, обеспечивающий разгон потока до $\lambda_1 = 1$. Из (7.88) и (7.89), полагая $\lambda_1 = 1$, получаем

$$\Delta G_{кр} = G_0 \left(\frac{1}{q\,(\lambda_0)} - 1 \right). \tag{7.90}$$

Изменение параметров в расходном сопле соответствует изменению параметров в геометрическом сопле (см. рис. 7.23).

Рассмотрим еще один случай реализации расходного воздействия, при котором полная энергия подаваемой массы расходного воздействия равна полной энергии основного потока:

$$T_0^* = T_в^*, \tag{7.91}$$

однако газ подается практически по нормали к вектору скорости основного потока, т. е. $w_{тв} = 0$, $w_в < w$. В этом случае процесс будет необратимым из-за потерь на смешение.

Расчет параметров для этого случая производится на основе газодинамической модели следующим образом. С учетом (7.91)

в случае цилиндрического канала сила $P_x = 0$, и из уравнения количества движения (4.85) определяется λ_1 по функции $z(\lambda_1)$:

$$z(\lambda_1) = z(\lambda_0)\,\frac{G_0}{G_1}\,. \tag{7.92}$$

Потери давления торможения определяются также на основе уравнения количества движения (4.86):

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_0^*} = \frac{f(\lambda_0)}{f(\lambda_1)}\,. \tag{7.93}$$

Расчет остальных параметров производится по газодинамическим функциям $\tau(\lambda)$, $\pi(\lambda)$, $\varepsilon(\lambda)$:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_0)}\,. \tag{7.94}$$

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\pi(\lambda_1)}{\pi(\lambda_0)}\,; \tag{7.95}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\varepsilon(\lambda_1)}{\varepsilon(\lambda_0)}\,. \tag{7.96}$$

Скорость газа определяется для $a_{кр} = \mathrm{const}$ как

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\,. \tag{7.97}$$

Пример расчета изменения параметров в канале с расходным воздействием показан на рис. 7.24 в зависимости от M_1. По сравнению с предыдущим случаем процесс идет более интенсивно, так как дополнительно к рабочему телу подводится тепло диссипации из процесса смешения потоков с различными скоростями.

7.4.7. Комбинированное воздействие. В реальных течениях, как правило, проявляется несколько воздействий, действие кото-

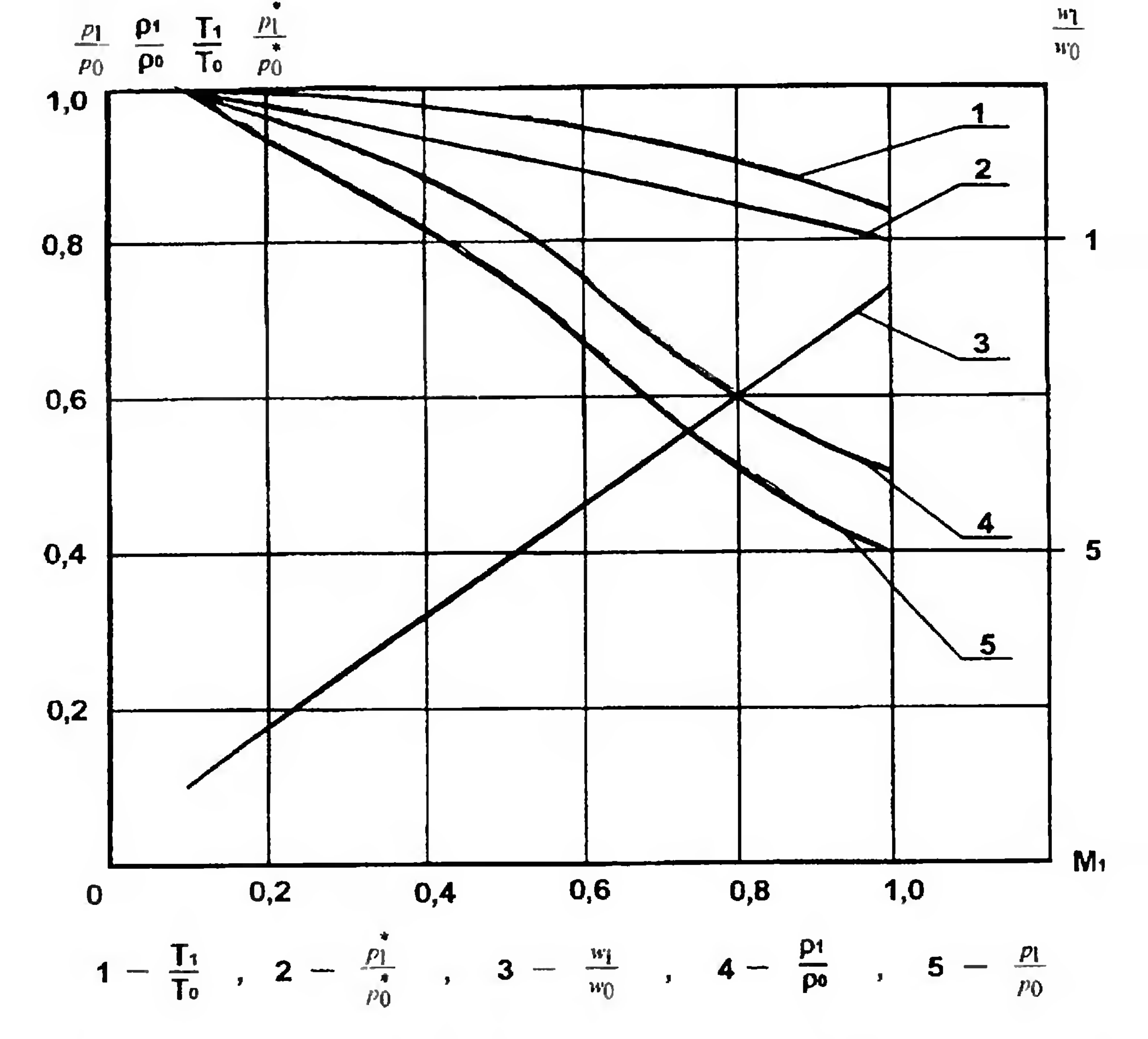


Рис. 7.24. Изменение параметров в цилиндрическом канале с подводом массы на дозвуковом режиме при $T^* = \text{const}$

рых, как следует из закона обращения воздействий, аддитивно. Например, в геометрическом сопле Лаваля действует воздействие трения $dl_{\text{тр}}$, а при очень высоких температурах рабочего тела, когда сопло приходится охлаждать, — то и тепловое воздействие. Это может приводить к смещению критического сечения, т. е. сечения, в котором М = 1, либо в расширяющуюся, либо в сужающуюся часть сопла. Для рассматриваемого случая условие кризиса запишется так:

$$\frac{dF}{F} - \frac{(k-1)}{a^2}\,dq_{\text{н}} - dl_{\text{тр}} = 0, \tag{7.98}$$

причем $dq_н < 0$, а $dl_{тр} > 0$, и в зависимости от интенсивности воздействий сечение может сместиться от минимального геометрического сечения.

8. ИЗМЕРЕНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

8.1. Зондовые методы

8.1.1. Измерение статического давления. *Статическое давление* — это давление потока в координатах, движущихся вместе с потоком. Физически трудно создать устройство, движущееся вместе с потоком, для измерения давления. Однако есть два обстоятельства, которые позволяют измерять статическое давление на неподвижных поверхностях в движущемся потоке. Первое — это пограничный слой на обтекаемой поверхности, в котором скорость потока у стенки равна нулю, если стенка неподвижна, или скорости стенки, если она движется (гипотеза прилипания Прандтля), и второе — высокая скорость распространения импульса давления (скорость звука), которая практически всегда (из-за малой толщины пограничного слоя) выравнивает статическое давление в потоке и на стенке.

Статическое давление измеряется на аэродинамической поверхности, устанавливаемой параллельно линии тока (вектору скорости) измеряемого потока. В качестве поверхности используются стенки канала (рис. 8.1) или поверхность специального

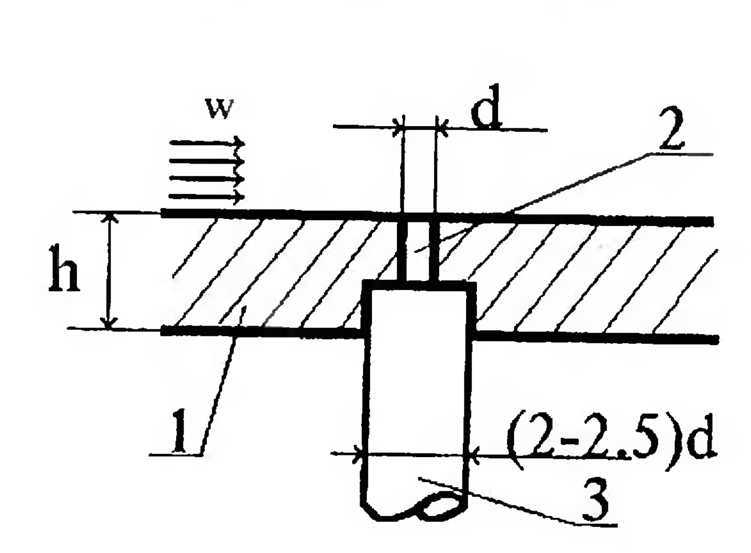


Рис. 8.1. Измерение статического давления на стенке канала

зонда (рис. 8.2), называемого *насадком статического давления*.

Отбор давления осуществляется посредством дренажных отверстий *2* (рис. 8.2), и далее давление с помощью трубок *3* передается на измеритель. Для обеспечения достаточной точности измерений необходимо, чтобы возмущения от насадков не влияли на величину давления, а вектор скорости был бы параллелен поверхности, на которой осуществляется отбор давления. С этой целью отверстие отбора выполняется размером, обеспечивающим разумный компромисс между минимизацией его для предотвращения вихреобразования и максимизацией для предотвращения забивания частицами пыли. Кроме того, приемные отверстия выполняются с особой тщательностью, не допускаются заусенцы, рваные кромки и неровности. Реально диаметры отверстий выполняются в диапазоне 0,3—0,8 мм [40].

Рис. 8.2. Измерение статического давления во внутренней точке потока зондом статического давления

Форма насадка, расположение отверстий, расстояние от носика до державки влияют на погрешность измерения. Эти параметры выбираются на основе экспериментов. На рис. 8.2 показаны насадки различной формы, все они могут использоваться как в сверхзвуковом, так и в дозвуковом потоке. Отверстия *2* выполняются на расстоянии l = 8—12 диаметров (калибров) насадка от носика, причем большие значения соответствуют большим скоростям. Заостренные формы предпочтительно используются для сверхзвуковых потоков (рис. 8.2,*в*).

Измерение давления проводится с помощью пьезометров, манометров или различных датчиков с электрическими преобразователями сигнала (тензометрические, потенциометрические, индуктивные или др. [41]). Насадок статического давления достаточно чувствителен к углу скоса потока (угол между вектором скорости и плоскостью измерения), погрешность в пределах 1% сохраняется, если этот угол не превышает 5°. При измерении статического давления за ударной волной или скачком уплотнения из-за взаимодействия с пограничным слоем возможны существенные погрешности, которые проявляются сильнее,если пограничный слой ламинарный.

8.1.2. Измерение полного давления или давления торможения. Трубка Пито. Как было показано выше, давление торможения p^* — это то давление, которое принимает поток в процессе изоэнтропийного торможения в энергетически изолированном потоке. Поэтому для измерения p^* используют устройство, реализующее процесс энергетически изолированного торможения. Оно называется *насадком* или *трубкой Пито* и представляет собой трубку с открытым концом *1*, установленную параллельно и навстречу набегающему потоку (против вектора скорости), рис. 8.3,*а*. Другой конец трубки *2* соединен с измерителем давления (пьезометром, манометром и т.д.). Жидкость внутри трубки находится в покое, поэтому струйка потока изоэнтропийно тормозится перед насадком (в дозвуковом потоке), если числа Re, отнесенные к диаметру трубки, не являются малыми. В этом случае измеряется давление торможения в набегающем потоке $p^*_н$. В сверхзвуковом потоке перед трубкой возникает скачок (рис. 8.3,*в*), и в этом случае измеряемое давле-

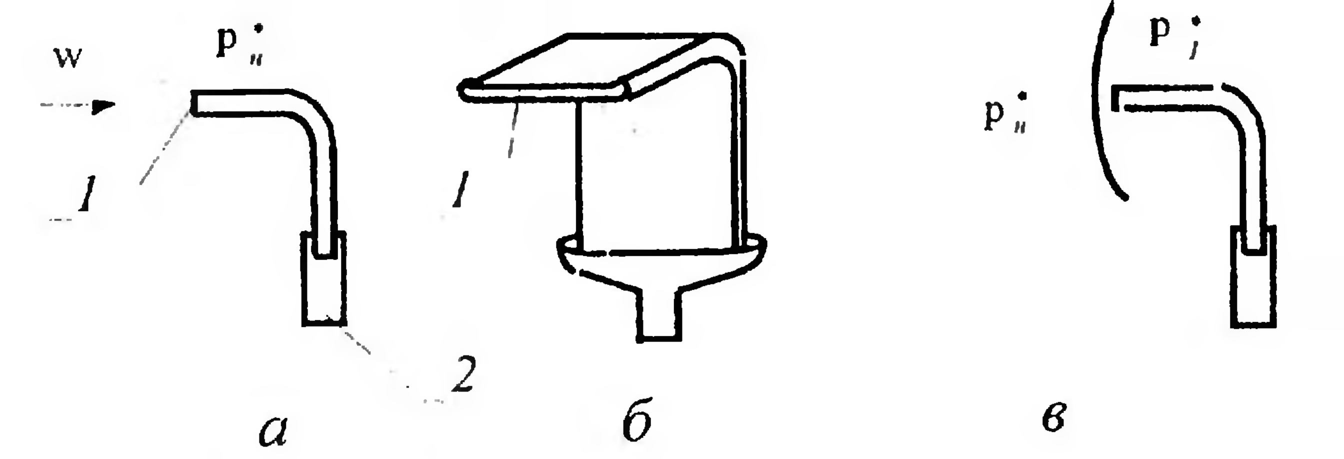


Рис. 8.3. Различные трубки Пито для измерения давления торможения

ние будет соответствовать давлению за прямым скачком уплотнения p_1^*.

Устройство для измерения давления торможения так же, как и для статического, должно вызывать минимальные возмущения, однако оно менее чувствительно к углу скоса потока: погрешность меньше 1% сохраняется до углов скоса порядка 20°.

Для измерения распределения давления торможения в пограничном слое используют трубку Пито, имеющую сплющенный носик (*1*, рис. 8.3,*б*). Это связно с наличием поперечного градиента давления в пограничном слое,влияние которого на измерения позволяет снизить такая форма приемного отверстия.

8.1.3. Определение числа Маха по измерениям статического давления или давления торможения. Трубка Пито—Прандтля. По измерениям статического давления и давления торможения можно определить число Маха и приведенную скорость λ. При измерениях в дозвуковом потоке числа Маха $M_н$ и $\lambda_н$ определяются из соотношений газодинамических функций:

$$\frac{p_н^*}{p_н} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_н^2\right)^{\frac{k}{k-1}}; \qquad (8.1)$$

$$\frac{p_н}{p_н^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_н^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \qquad (8.2)$$

В сверхзвуковом потоке с учетом наличия прямого скачка перед насадком число $M_н$ и $\lambda_н$ определяется по формуле Релея [9]

$$\frac{p_1^*}{p_н}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}\left(\frac{2}{k-1}\right)^{\frac{1}{k-1}}\frac{(M_н)^{\frac{2k}{k-1}}}{\left(\frac{2k}{k-1}M_н^2-1\right)^{\frac{1}{k-1}}}, \qquad (8.3)$$

или

$$\frac{p_1^*}{p_н}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_н^2}-\frac{k-1}{k+1}\right)\left(1-\frac{k-1}{k+1}\frac{1}{\lambda_н^2}\right)^{\frac{1}{k-1}}}. \qquad (8.4)$$

Для одновременного измерения статического и полного давления используется трубка Пито-Прандтля. Она сочетает в одном корпусе приемники давления торможения и статического давления (рис. 8.4). На рисунке показано также изменение p и p^*. При торможении в передней точке A давление повышается до p^*, а затем при обтекании насадка падает ниже p (за точкой B) и восстанавливается в точке C, где расположены отверстия для замера статического давления.

Поскольку трубка Пито-Прандтля должна устанавливаться в направлении линии тока, то для снижения чувствительности на входе делается раззенковка (рассверливание) входного отверстия (точка A на рис. 8.4). Применение трубки Пито-Прандтля позволяет определить статическое давление p:

$$p=\Delta p+B_0 \qquad (8.5)$$

и давление торможения p^*

$$p^*=\Delta p^*+p, \qquad (8.6)$$

где B_0 — атмосферное давление; Δp и Δp^* — измеряемые перепады давления.

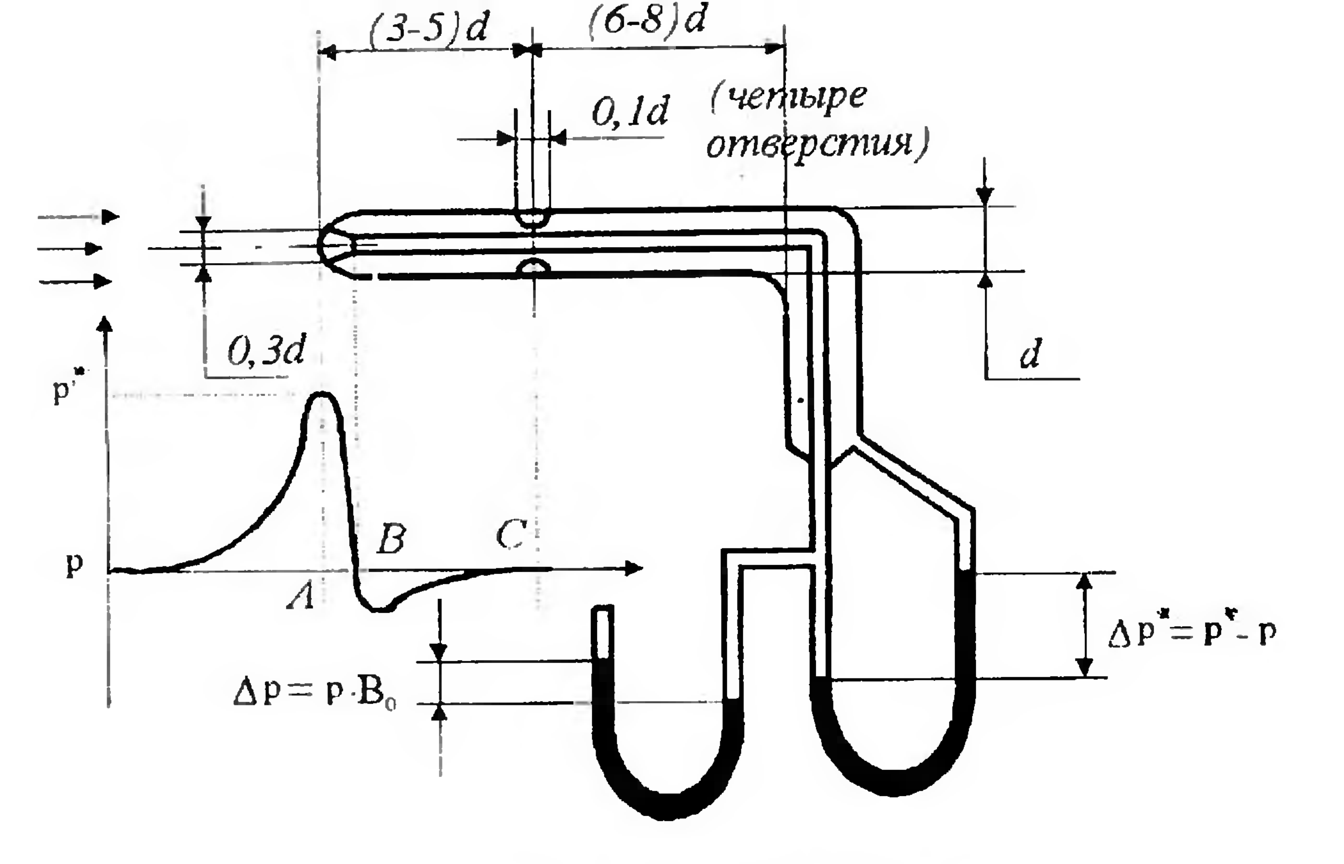


Рис. 8.4. Схема трубки Пито-Прандтля

По полученным данным, используя (8.3) и (8.4), можно рассчитать числа М и λ.

8.1.4. Измерение температуры торможения. Температура торможения потока измеряется путем введения в исследуемую среду неподвижного приемника, который, взаимодействуя с потоком, принимает значение некоторой равновесной температуры. В качестве такого приемника используются термопары, термосопротивления, нить термоанемометра и т. п. К особенностям такого способа следует отнести:

1) невозможность измерить статическую температуру. Для этого приемник должен был бы двигаться со скоростью потока;

2) потери энергии на теплоотдачу за счет теплопроводности, конвекции и лучистого теплообмена.

Рассмотрим измерение температуры в газовом потоке с помощью помещенной в него неподвижной термопары (рис. 8.5). Газ, текущий в центральной струйке со скоростью $w_н$ и температурой $T_н$, изоэнтропно затормаживается в критической точке K горячего спая 1 ($w_к = 0$). Вся кинетическая энергия газа

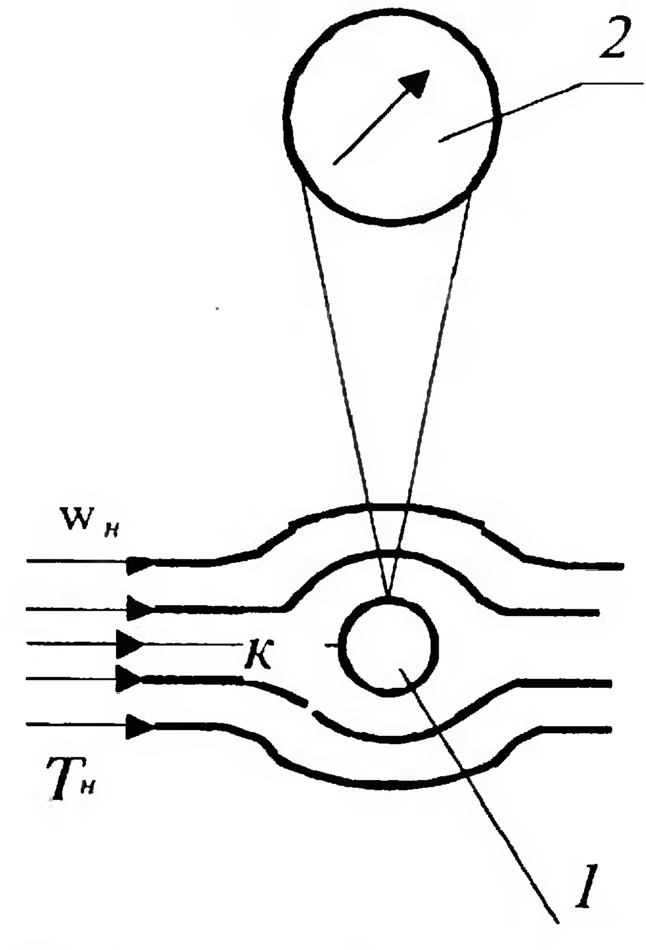


Рис. 8.5. Измерение температуры в газовом потоке

переходит в энтальпию, а температура принимает значение температуры торможения $T_к = T^*_н$:

$$T^*_н = T_н + \frac{w^2_н}{2C_p} = T_к \ . \qquad (8.7)$$

Во всех остальных точках поверхности горячего спая, благодаря гипотезе прилипания и образованию пограничного слоя, температура также будет иметь значение температуры торможения. Если бы не было теплообмена с близтекущими слоями газа и других отмеченных выше потерь энергии, то температура горячего спая *1* равнялась бы температуре торможения $T^*_н$ газового потока.

Реально горячий спай *1* принимает значение некоторой температуры T_r, лежащей в диапазоне $T_н < T_r < T^*_н$. Для оценки

погрешности измерения температуры торможения вводится *коэффициент восстановления температуры приемника r*

$$r = \frac{T_r - T_н}{T^*_н - T_н}. \quad (8.8)$$

В общем случае значение r зависит от критериев скоростного режима M, гидравлического режима Re, теплового режима Pr и показателя изоэнтропы k. Для умеренных температур можно полагать $r = r$ (M, Re).

Для повышения значения r и его стабилизации в случаях использования термопары на различных режимах их делают *экранированными*. Схема такой экранированной термопары с прососом газа, обеспечивающим измерение температуры, близкой к температуре торможения $T^*_н$, показана на рис. 8.6. Горячий спай *3* помещается внутрь корпуса экрана *2*. В экране имеется отверстие *1* диаметром d_1 для входа потока, который тормозится внутри корпуса до $T^*_н$. Потери тепла снижаются за счет уменьшения диаметра шарика горячего спая *3* и подводящих проводов, которые отделяются изолятором *6* от корпуса *2*. С целью уменьшения инерционности термопары в корпусе *2* имеется отверстие *4* диаметром $d_4 << d_1$, обеспечивающее непрерывную смену рабочего тела внутри корпуса экрана при почти полном его торможении.



Рис. 8.6. Схема экранированной термопары

Для термопары с открытым спаем коэффициента восстановления $r = 0,7 \div 0,9$, для экранированной термопары $r = 0,9 \div 0,98$. Экспериментально установлено, что для экранированной термо-

пары r не зависит от числа Re, а в диапазоне чисел $M \le 1$ практически не изменяется [41].

8.1.5. Определение скорости потока. Измерения статического давления p, давления торможения p^* и температуры торможения T^*, расчет чисел M и λ позволяют определить локальное (в измеряемой точке) значение скорости потока W. С этой целью рассчитывается критическая скорость звука (4.41)

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*},$$

по вычисленному значению λ определяется скорость (4.42)

$$w = \lambda a_{\text{кр}}.$$

Если ранее было определено число M, то можно определить λ из формулы (4.49)

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 - \frac{k-1}{2} M^2}$$

и далее воспользоваться формулами (4.41) и (4.45).

Для небольших скоростей течения газа ($M < 0{,}3$) можно использовать приближение несжимаемой жидкости. Тогда, принимая $T \cong T^*$, определяем плотность потока по уравнению состояния (2.63)

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

а затем из уравнения Бернулли

$$w = \sqrt{\frac{2\Delta p^*}{\rho}}, \tag{8.9}$$

где

$$\Delta p^* = p^* - p. \tag{8.10}$$

8.1.6. Определение расхода. Для определения расхода жидкости или газа используют устройства различного типа. Наибольшее распространение получили дроссельные приборы. Принцип действия дроссельных приборов основан на введении искусственного возмущения в поток путем уменьшения площади сечения канала F. Это приводит к увеличению скорости и уменьшению давления, измерив которое можно судить о скорости потока, а при известных (или рассчитываемых) плотности ρ и площади сечения F — о расходе. В случаях, когда давление торможения в потоке больше атмосферного, используются диафрагмы (рис. 8.7,*а*), сопла (рис. 8.7,*б*) и трубки Вентури (рис. 8.7,*в*). Измеряются статические давления до расходного устройства p_1 и за устройством (диафрагмой) или в минимальном сечении устройства p_2 (сопло и трубка Вентури). С помощью термопары или иного устройства, устанавливаемого до расходомера, измеряется температура торможения T_1^*. Полагая $T_1 \equiv T_1^*$ и $p_1 \equiv p_1^*$, определяем плотность газа ρ_1 по формуле (2.63):

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}$$

и среднюю скорость потока в устройстве

$$w_2 = \varphi \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_1}}, \qquad (8.11)$$

где $\Delta p = p_1 - p_2$, φ — коэффициент скорости.

Расход газа определяется по формуле

$$G = \psi F_2 \sqrt{2\rho_1 \Delta p}\,, \qquad (8.12)$$

где F_2 — площадь минимального сечения расходного устройства; ψ — коэффициент расхода.

Коэффициенты φ и ψ определяются конструкцией прибора, его относительными размерами и числом Re. Формулы (8.11) и (8.12) справедливы и для газов до чисел $M < 0{,}2$. При больших числах до $M < 1$ необходимо вводить поправку на сжимаемость.

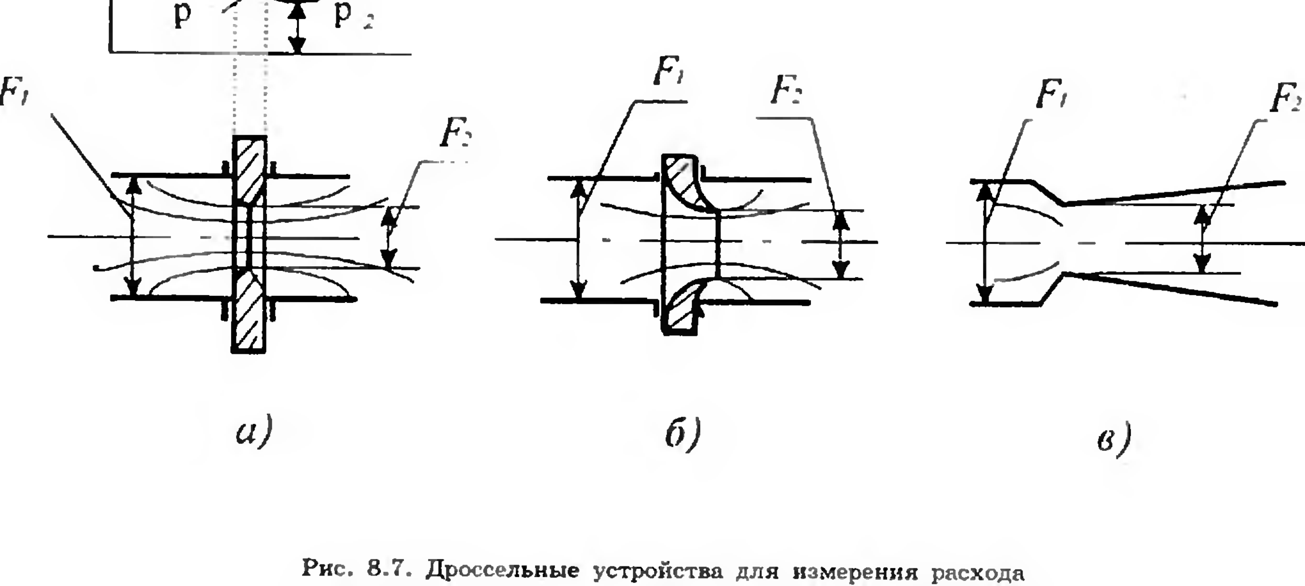


Рис. 8.7. Дроссельные устройства для измерения расхода

Следует отметить некоторые особенности использования и работы дроссельных устройств рассмотренных типов:

— измерения давления p_1 и p_2 производят непосредственно на входе и выходе из устройств; эти давления подставляют в расчетные формулы (8.11) и (8.12);

— для диафрагмы и сопла давление p и p_1 отличаются друг от друга,а для трубки Вентури — совпадают;

— течение потока в дроссельных устройствах приводит к потерям давления торможения δp^*, совпадающим с уменьшением статического давления δp. Наибольшие потери имеет диафрагма, наименьшие — трубка Вентури;

— если дроссельные устройства выполнены не в соответствии со стандартами на эти устройства, то для определения коэффициентов φ и ψ их необходимо тарировать.

В ряде случаев рабочее тело (воздух) забирается из атмосферы. Тогда известны давление торможения $p_н^* = B_0$ (B_0 — атмосферное давление) и температура торможения $T_н^* = T_н$ ($T_н$ — атмосферная температура). В этом случае для определения расхода достаточно измерить статическое давление p_1 в некотором сечении F_1 устройства (рис. 8.8). Затем определяются по формуле (2.63) плотность ρ и расход G — по формуле (8.12), в которую подставляются значения $\Delta p = B_0 - p_1$, F_1, ρ_1. Для получения равномерного поля скоростей в измерительном сечении и уменьшения гидравлических потерь профиль устройства для забора воздуха выполняется по лемнискате.

8.2. О лазерно-оптических методах измерения газодинамических параметров

Регистрация взаимодействия электромагнитной волны (света) с веществом рабочего тела (жидкости или газа) позволяет в принципе регистрировать все необходимые газодинамические параметры. А в отличие от зондовых методов, которые, как правило, регистрируют некоторые средние (по времени) значения параметров, лазерно-оптические методы позволяют регистрировать быстропротекающие и нестационарные процессы

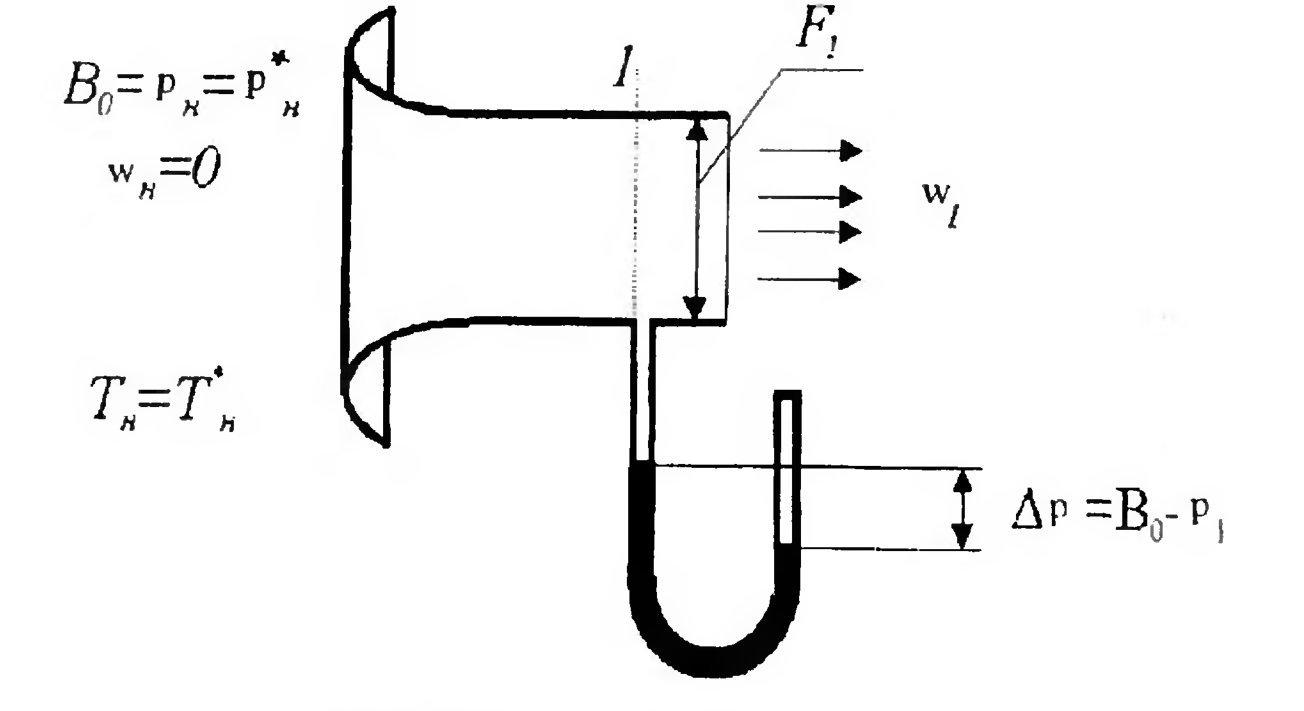


Рис. 8.8. Лемнискатный насадок

бесконтактным способом, без внесения возмущений в поток. В оптическом диапазоне можно применять эти методы для визуализации течения.

Световая волна, или электромагнитное излучение, имеет следующие характеристики: длину волны, частоту, фазу, амплитуду, поляризацию и скорость распространения.

Регистрация любой из них после взаимодействия с веществом может служить для измерения параметров потока.

Так называемые оптические методы [42, 44, 46] основаны на регистрации амплитудных и фазовых характеристик. Эти методы используют зависимость скорости распространения света от плотности вещества, которая характеризуется зависимостью показателя преломления вещества от относительного изменения плотности. Наличие переменной плотности на пути светового луча вызывает их искривление и фазовый сдвиг на различных лучах. Искривление лучей связано с поворотом волнового фронта (преломлением лучей). Поворот волнового фронта используется в теневом и шлирен-методе (методе Теплера), а фазовый сдвиг — в интерференционном методе. Теневой метод является хорошим методом визуализации, регистрирующим амплитудные характеристики, и применяется в аэродинамических трубах для регистрации волновых явлений (ударных волн, характеристик), а также различных неоднородностей течения. Интер-

ференционный метод требует когерентного источника света, но зато позволяет достаточно точно количественно регистрировать плотность потока [42].

Регистрация фазовой информации источника монохроматического излучения используется при определении скорости на основе доплеровского эффекта сдвига частоты движущегося объекта [42].

Регистрация вынужденного излучения (частоты) позволяет определить состав смеси газов и их температуру [42].

Следует отметить, что лазерно-оптические методы достаточно сложны, требуют дорогостоящей аппаратуры и квалифицированного персонала для ее обслуживания. Поэтому эти методы следует использовать только в тех случаях, когда другими, более простыми методами не могут быть сделаны необходимые измерения.

9. МНОГОФАЗНЫЕ МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

9.1. Основные понятия и определения

Вещества рабочего тела системы различаются по *фазовому* и *компонентному* составу.Для определения фазы и компонента вводится понятие *чистого* вещества.***Чистым веществом*** системы рабочего тела называется вещество, состоящее из одинаковых молекул и неизменное в химическом отношении. ***Компонентом*** системы называется химически однородная часть системы. ***Фазой*** называется физически однородная часть системы, отделенная от других частей поверхностями раздела, в пределах которых состав и свойства остаются постоянными или изменяются непрерывно, а на поверхностях раздела — скачкообразно.

Система, состоящая из нескольких фаз и нескольких компонентов, называется ***многофазной многокомпонентной системой***. Фазы различают также по агрегатному состоянию вещества: *жидкая, твердая, газообразная.*

Фазы, находящиеся в жидком или твердом состоянии, называют ***конденсированными***. В многофазных системах одна из фаз бывает непрерывно распределена в объеме системы и выполняет роль несущей фазы. Такую фазу называют ***дисперсион-***

ной (например, жидкость или газ). Фазы, дискретно распределенные в системе, называют ***дисперсными*** — например, капли, пузырьки, твердые частицы.

Системы,состоящие из дисперсных фаз, называют ***дисперсными.*** Различают следующие виды дисперсных систем:

— *суспензии*: смеси жидкостей с твердыми частицами;

— *эмульсии*: смеси жидкостей с каплями другой жидкости;

— *газовзвеси* или аэровзвеси: смеси газа с твердыми частицами или жидкими каплями. Иногда смеси газа с жидкими каплями называют *аэрозолями*;

— *пузырьковые системы*: смеси жидкости с пузырьками газа или пара;

— *пены*: системы, состоящие из двух фаз в дисперсном состоянии.

Далее предметом рассмотрения будут дисперсные ***аэрозольные*** и ***пузырьковые системы.***

9.2. Структура дисперсной системы

Структура дисперсной системы характеризуется:

— степенью однородности системы в целом (гомогенная, гетерогенная),

— видом (аэрозольная, пузырьковая),

— составом дисперсной фазы (капли, частицы, пленки),

— степенью однородности по дисперсной фазе (монодисперсная, полидисперсная),

— геометрией дисперсной фазы (размер и форма).

9.3. Параметры, характеризующие состояние многофазной системы

Рассмотрим параметры, характеризующие состояние системы. Будем обозначать индексом i — фазу; индексом f — компонент. Параметры без индекса будут относиться к системе в целом. Индексом $i = 1$ будем обозначать параметры несущей фазы. Для простоты рассмотрим систему, отличающуюся только по фазовому составу.

1. Объемная концентрация i-й фазы, или объемное фазосодержание,

$$\varphi_i = \frac{V_i}{V}, \quad 0 \le \varphi_i \le 1, \tag{9.1}$$

где V_i — объем фазы i; V — объем системы, так что $V = \sum_{i=1}^{N} V_i$; N — число фаз.

2. Массовая концентрация i-й фазы

$$\chi_i = \frac{m_i}{m}, \tag{9.2}$$

где m_i — масса фазы i в объеме V_i; m — масса системы в объеме V, так что

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{9.3}$$

3. Истинная плотность фазы i

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i}. \tag{9.4}$$

4. Парциальная плотность фазы i

$$\rho_{i\,\text{П}} = \frac{m_i}{V} = \chi_i \rho. \tag{9.5}$$

5. Средняя плотность среды системы

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{9.6}$$

6. Массовая расходная концентрация

$$\chi_{iG} = \frac{G_i}{G}, \tag{9.7}$$

где G — массовый расход.

Очевидно, справедливы следующие соотношения между параметрами:

$$\sum_{i=1}^{N} \rho_{i\Pi} = \sum_{i=1}^{N} \rho\chi_i = \sum_{i=1}^{N} \rho_i\varphi_i = \rho, \quad (9.8)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_i}{\rho_i} = \frac{1}{\rho}.$$

7. Истинная скорость движения фазы

$$w_i = \frac{m_i}{\rho_i F_i t} = \frac{G_i}{\rho_i F_i}, \quad (9.9)$$

где F_i — часть площади сечения, занятая фазой i,

$$F_i = \varphi_i F, \quad (9.10)$$

F — сечение системы

$$\frac{m_i}{t} = G_i. \quad (9.11)$$

8. Средняя скорость среды

$$w = \frac{m}{\rho F t} = \frac{G}{\rho F}. \quad (9.12)$$

Очевидно, связь между w_i и w определяется как

$$w = \frac{m}{\rho F t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_i m_i}{\varphi_i \rho_i F t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\chi_i m_i}{\rho_i F t} = \sum_{i=1}^{N} \chi_i w_i. \quad (9.13)$$

9. Среднерасходная скорость среды

$$w_G = \sum \chi_{iG} w. \quad (9.14)$$

10. Скольжение (коэффициент скольжения) — это отношение скорости дисперсной фазы к скорости несущей фазы:

$$\nu = \frac{w_i}{w_1}. \quad (9.15)$$

11. *Относительная скорость фаз* — это разность между скоростями несущей и дисперсной фазы:

$$w_{1i} = (w_1 - w_i) = -w_{i1} . \quad (9.16)$$

12. *Скорость дрейфа* — это разность между скоростью фазы и средней расходной скоростью среды

$$w_{1G} = w_1 - w_G . \quad (9.17)$$

9.4. Математическая модель двухфазного стационарного течения в одномерном приближении

Общие допущения

1. Каждая фаза является сплошной средой (гипотеза взаимопроникающих сред).

2. Размер областей фазовых неоднородностей много меньше расстояний, на которых макроскопические параметры системы меняются существенно (вне поверхностей разрыва) — условие непрерывности.

3. Каждая фаза локально однородная, т. е. внутри фазы имеется локальное равновесие.

4. Каждый компонент представляет собой двухпараметрическую среду, т. е. термодинамические функции зависят от двух параметров.

5. Молекулярной диффузией пренебрегаем.

6. Вязкостью внутри фаз пренебрегаем.

7. Система монодисперсная.

8. Поверхностной фазой пренебрегаем.

9. Частицы дисперсной фазы — сферы.

10. Энергией пульсационного движения (вращение, деформации) пренебрегаем.

11. Столкновения частиц фаз отсутствуют.

12. Отсутствуют процессы дробления, слипания, коагуляции и образования новых дисперсных частиц.

9.4.1. Уравнения сохранения массы. Пусть J_{12} характеризует интенсивность перехода массы фазы *1* в массу фазы *2* (конденсация); если $J_{12} < 0$, то это будет означать, что идет испарение. Очевидно, $J_{12} = -J_{21}$. Из закона сохранения массы для единицы объема системы получаем

$$\frac{d(\rho_1\varphi_1 w_1)}{dx} = J_{21}; \qquad (9.18)$$

$$\frac{d(\rho_2\varphi_2 w_2)}{dx} = J_{12}; \qquad (9.19)$$

$$J_{12} = \frac{dm_{12}}{Vdt}, \qquad (9.20)$$

где dm_{12} — масса фазы *1*, перешедшая в фазу *2*.

Применительно к системе струйки

$$J_{12} = \frac{dm_{12}}{V\,dt} = \frac{dG_{12}}{F\,dx} = \frac{\rho w d\chi_{1G}}{dx} = \frac{(\rho_1\varphi_1 w_1 + \rho_1\varphi_2 w_2)\,d\chi_{1G}}{dx}; \qquad (9.21)$$

$$\chi_{1G} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}. \qquad (9.22)$$

Очевидно, справедливы соотношения

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 1; \qquad (9.23)$$

$$\chi_{1G} + \chi_{2G} = 1. \qquad (9.24)$$

9.4.2. Уравнения движения (сохранения количества движения). Обмен импульсом между фазами *1* и *2* в единицу времени в единице объема может быть представлен в виде

$$P_{12} = -P_{21} = \sum R_{12} + J_{12}\,w_{12}, \qquad (9.25)$$

где $\sum R_{12}$ — суммарная сила межфазного взаимодействия за счет сил трения, давления и др., отнесенная к единице объема системы. Величина $J_{12}w_{12}$ представляет собой изменение импульса соответствующей фазы за счет фазовых превращений, в частности, из фазы *1* в фазу *2* (конденсация) уходит импульс $J_{12}w_{12}$. Величина w_{12} характеризует скорость (или импульс массы), претерпевающей превращение $1 \to 2$.

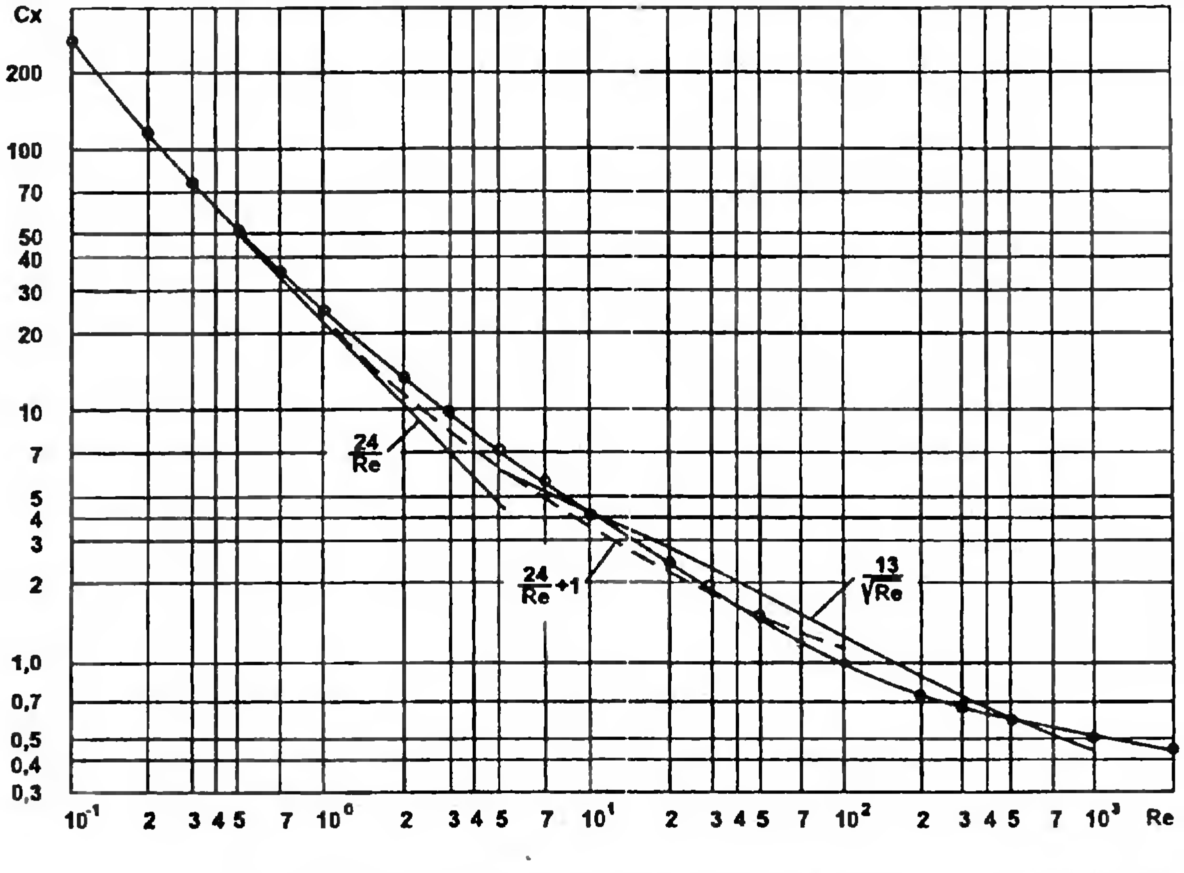


Рис. 9.1. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Re

Тогда уравнения движения на единицу объема системы для каждой фазы будут иметь вид (в проекции на ось x)

$$\varphi_1\rho_1 w_{1x}\frac{dw_{1x}}{dx} = -\frac{d(\varphi_1 p_1)}{dx} + \sum_{j=1}^{m} R_{j1_x} +$$

$$J_{21}(w_{21_x} - w_{1_x}) + \rho_1\varphi_1 g_x; \tag{9.26}$$

$$\varphi_2\rho_2 w_{2x}\frac{dw_{2x}}{dx} = -\frac{d(\varphi_2 p_2)}{dx} + \sum_{j=1}^{m} R_{j2_x} +$$

$$J_{12}(w_{12_x} - w_{2_x}) + \rho_2\varphi_2 g_x, \tag{9.27}$$

где

$$w_{21_x} = -w_{12_x}, \quad J_{21} = -J_{12}, \tag{9.28}$$

$j = 1, ..., m$ — виды различных сил межфазного и межсистемного взаимодействия;

$$R_{j1_x} = -R_{j2_x}, \tag{9.29}$$

g_x — проекция вектора ускорения силы тяжести на ось x.

9.4.3. Уравнения сохранения энергии. Величина притока энергии, характеризующая приток энергии от фазы *1* к фазе *2* E_{12} на единицу объема в единицу времени, может быть представлена в виде суммы слагаемых

$$E_{12} = W_{12} + Q_{12} + J_{12}\cdot\left(U_{12} + \frac{1}{2}(w_{12})^2\right). \tag{9.30}$$

Здесь W_{12} характеризует передачу энергии от фазы *1* к фазе *2* за счет работы сил взаимодействия между фазами при перемещении межфазных поверхностей; Q_{12} — теплообмен за счет контакта между фазами; U_{12} — внутренняя энергия массы фазы, претерпевающая изменение за счет перехода фазы из *1*

в *2*. Член $J_{12}\left(U_{12}+\frac{1}{2}(w_{12})^2\right)$ характеризует полную энергию, которую приносит масса фазы *1*, претерпевающая фазовый переход, фазе *2*. Тогда уравнения энергии на единицу объема системы для каждой фазы будут иметь вид:

$$\rho_1\varphi_1 w_1 \frac{d}{dx}\left(u_1+\frac{w_1^2}{2}\right)=-\frac{\partial\varphi_1 p_1 w_1}{\partial x}+W_{21}+Q_{21}+$$

$$+J_{21}\left[(u_{21}-u_1)+\frac{w_{21}^2-w_1^2}{2}\right]+\rho_1\varphi_1 g_x w_1+\frac{\partial\varphi_1 q_1}{\partial x}; \qquad (9.31)$$

$$\rho_2\varphi_2 w_2 \frac{d}{dx}\left(u_2+\frac{w_2^2}{2}\right)=-\frac{\partial\varphi_2 p_2 w_2}{\partial x}+W_{12}+Q_{12}+$$

$$+J_{12}\left[(u_{12}-u_2)+\frac{w_{12}^2-w_2^2}{2}\right]+\rho_2\varphi_2 g_x w_2+\frac{\partial\varphi_2 q_2}{\partial x}. \qquad (9.32)$$

Здесь

$$W_{21}=\rho_1\varphi_1\left(\sum_{j=1}^{m} R_{j2}w_2\right)+Q_{\text{тр}_2}; \qquad (9.33)$$

$$W_{12}=\rho_1\varphi_1\left(\sum_{j=1}^{m} R_{j1}w_1\right)+Q_{\text{тр}_1}, \qquad (9.34)$$

где q — внешнее тепло; $Q_{\text{тр}}$ — тепло трения.

9.4.4. Определяющие уравнения — уравнения состояния. Для выбранных нами типов течения двухфазной среды одна из фаз будет подчиняться уравнению состояния сжимаемого совершенного газа, а другая — уравнению состояния несжимаемой жидкости. Полагая для определенности поток аэрозольным, эти уравнения запишем как

$$p_1=\rho_1 R_1 T_1; \qquad (9.35)$$

$$\rho_2=\text{const}. \qquad (9.36)$$

9.4.5. Условия межфазного взаимодействия.

1. Условие совместного деформирования фаз

$$p_1 (\rho_1 T_1) = p_2 (\rho_2 T_2) = p \tag{9.37}$$

представляет собой так называемую "однодавленческую" модель, когда давлением собственно "газа частиц" пренебрегается.

2. Энергия диссипации межфазного силового вязкого взаимодействия, переходящая во внутреннюю энергию каждой фазы, распределяется так: тепло трения целиком воспринимается газовой фазой, так что

$$Q_{тр2} = 0, \quad Q_{тр} = Q_{тр1} . \tag{9.38}$$

9.4.6. Условия внутреннего межфазного теплообмена.

1. Тепловые потоки, характеризующие интенсивность контактного теплообмена между фазами из-за температурной неравновесности, равны:

$$Q_{12} + Q_{21} = 0. \tag{9.39}$$

2. Тепловые потоки за счет фазовых переходов (испарения и конденсации) равны между собой, т.е.

$$J_{21} (i_2 - i_1) = - J_{12} (i_1 - i_2), \tag{9.40}$$

где i — энтальпия.

9.5. Уравнения, определяющие массовое, силовое и энергетическое взаимодействие фаз

9.5.1. Массовое взаимодействие (процессы конденсации и испарения). Для рассматриваемого случая процессы массообмена связаны с фазовыми переходами, среди которых будем различать: *испарение, гетерогенную конденсацию и гомогенную конденсацию.*

Под ***гетерогенной конденсацией и испарением*** будем понимать фазовые переходы, связанные с процессами грубодисперсной фазы и определяемые интенсивностью теплообмена с дисперсной средой.

Под ***гомогенной конденсацией*** будем условно понимать процессы нуклеации и образования зародышей в непрерывной газовой фазе и конденсацию пара на этих зародышах. Сюда же

будем относить и конденсацию на посторонних центрах конденсации (пылинках, молекулах инертного газа), которая строго говоря, относится к гетерогенной конденсации.

Рассмотрим только гетерогенные процессы изменения массы. Для определения скорости испарения или конденсации J воспользуемся методом приведенной пленки, разработанным Франк-Каменецким [50]. Метод состоит в том, что реальные поля концентраций и температур, существующие вокруг исследуемой капли на ее поверхности, заменяются фиктивной присоединенной пленкой. Толщина этой пленки $\delta_{сл}$ определяется из условия равенства тепловых потоков: реального и теоретического, определенного из условия равенства давления и температуры на внешней границе пленки параметрам в невозмущенном потоке, а на внутренней границе — параметрам на поверхности капли.

Тогда

$$\delta_{сл} = \frac{a_2}{\mathrm{Nu}_{сл}}, \tag{9.41}$$

где a_2 — диаметр капли; Nu — тепловой критерий Нуссельта, или безразмерный коэффициент теплоотдачи; индекс "сл" — слой;

$$\mathrm{Nu}_{сл} = \frac{\alpha_{сл} a_2}{\lambda_1}; \tag{9.42}$$

$\alpha_{сл}$ — коэффициент теплоотдачи.

$$J_{12\,сл} = -G\varphi_2 \frac{\beta_2}{a_2}(\rho_s - \rho_p), \tag{9.43}$$

где φ_2 — объемная концентрация фазы; β_2 — коэффициент массоотдачи; ρ_s — плотность насыщенных паров на поверхности капли; ρ_p — плотность паров в несущей среде,

$$\rho_s = \frac{p_s}{R_2 T_2}, \quad \rho_p = \frac{p_p}{R_2 T_1}, \quad \beta_{сл} = \frac{\mathrm{Sh}_{сл} D_{сл}}{a_2}. \tag{9.44}$$

Здесь $Sh_{сл}$ — число Шервуда, или диффузионный критерий Нуссельта; $Sh = Nu_D$, $D_{сл}$ — коэффициент диффузии паров в пограничном слое капли; $p_p = \varphi_{2f}\, p$ — парциальное давление паров компонента *f* фазы *2* в несущей среде.

Число Шервуда может быть определено по критериальной формуле

$$Sh_2 = A_1 + A_2 \cdot Sc_{сл}^{m_1} \cdot Re_{сл}^{m_2}, \tag{9.45}$$

где A_1, A_2, m_1, m_2 —константы;

$$Sc_{сл} = \frac{\mu_{сл}}{\rho_{сл}\, D_{сл}} \tag{9.46}$$

— критерий Шмидта или диффузионное число Прандтля; $\mu_{сл}$ — коэффициент динамической вязкости паров в пограничном слое капли;

$$Re_{сл} = \frac{\rho_{сл}\,(w_1 - w_2)\,\delta_{сл}}{\mu_{сл}} \tag{9.47}$$

— число Рейнольдса.

9.5.2. Уравнения, описывающие силовое взаимодействие фаз. Будем полагать, что взаимодействие вдоль граничной поверхности выделенного объема системы, описываемое в общем случае тензором напряжения, а в частном случае — гидростатическим давлением, воспринимается несущей или дисперсионной фазой.

Несущая фаза действует на дисперсную фазу (целое число частиц) с силами, основными из которых являются следующие.

а) Сила сопротивления

$$\vec{R}_{c_{12}} = c_2 \frac{\rho_1\,(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)}{2}\, f_c\, n_2 \,|\, \vec{w}_1 - \vec{w}_2 \,|, \tag{9.48}$$

где c_2 — коэффициент сопротивления капли, зависящий от формы частиц, числа Re, M и числа частиц в единице объема n_2,

$$n_2 = \frac{6\varphi_2}{\pi a_2^3}. \tag{9.49}$$

б) Архимедова сила, обусловленная градиентом давления,

$$\vec{R}_{\Lambda_{12}} = -\varphi_2 \frac{dp}{dx}. \tag{9.50}$$

в) Сила воздействия присоединенных масс, возникающая из-за ускоренного движения частиц относительно несущей среды, когда в последней возникают возмущения на расстояниях порядка размера включения,

$$\vec{R}_{c_{12}} = k_п \varphi_2 \rho_2 \frac{d(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)}{dt}, \tag{9.51}$$

где $k_п$ — коэффициент, учитывающий влияние формы, неодиночность частиц и др.

г) Сила Магнуса или Жуковского, обусловленная градиентом поля средней скорости несущей фазы,

$$\vec{R}_{M_{12}} = \varphi_2 \rho_1 K_м (\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \times \vec{\omega}_2, \tag{9.52}$$

где $K_м$ — коэффициент, учитывающий влияние формы и неодиночности частиц,

$$\vec{\omega}_2 = \omega_1 \left[1 - \exp\left(-60 \frac{\mu t}{a_2^2 \rho_1}\right)\right], \tag{9.53}$$

$\vec{\omega}_2$ — вектор угловой скорости вращения капель;

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

t — время.

д) Сила, обусловленная градиентом температуры в потоке. Частица, помещенная в среду с большим градиентом температуры, начинает двигаться под воздействием молекул газа в область с меньшей температурой — явление термофореза:

$$\vec{R}_{T12} = -\frac{9\pi\lambda_1}{(2\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\mu_1^2}{2\rho_1} \frac{a_2}{T_1} \frac{dT_1}{dx}, \qquad (9.54)$$

λ_1 — коэффициент теплопроводности.

е) Массовая сила — сила тяжести, действие поля на частицу

$$\vec{R}_g = m_2 \vec{g} = \frac{\pi a_2^3}{6} \rho_2 \vec{g}. \qquad (9.55)$$

ж) Архимедова сила, обусловленная разностью плотностей вещества частицы и вещества дисперсионной фазы,

$$\vec{R}_g = \frac{\pi a_2^3}{6} \vec{g}(\rho_2 - \rho_1). \qquad (9.56)$$

9.5.3. Уравнения для энергетического взаимодействия фаз. Будем полагать, что между фазами совершается только конвективный теплообмен и обмен теплом за счет фазовых переходов, т. е.

$$Q_{12} = Q_{12}^{\text{ф.п}} + Q_{12}^{\text{конв}} \qquad (9.57)$$

на единицу объема в единицу времени,

$$Q_{12}^{\text{ф.п}} = rJ_{12}, \qquad (9.58)$$

где

$$r = i_{1s} - i_{2s} \qquad (9.59)$$

— теплота фазового перехода, индекс "S" соответствует параметрам на линии насыщения,

$$Q_{12}^{\text{конв}} = \alpha^{\text{конв}} f_{\text{пов}} (T_1 - T_2)\, n_2, \qquad (9.60)$$

где

$$\alpha^{\text{конв}} = \frac{\text{Nu}_{\text{сл}} \lambda_1}{a_2} \qquad (9.61)$$

— коэффициент теплоотдачи; λ_1 — коэффициент теплопроводности;

$$f_{пов} = \pi a_2^2 \tag{9.62}$$

— площадь поверхности капли; n_2 — счетная концентрация частиц — число частиц в единице объема системы.

Число Нуссельта в пограничном слое капли определяется по обобщенной формуле

$$\mathrm{Nu}_{сл} = A_3 + A_4 \,\mathrm{Pr}_{сл}^{m3}\, \mathrm{Re}_{сл}^{m4} + A_5 \,\mathrm{Pr}_{сл}^{m5}\, \mathrm{Re}_{сл}^{m6}, \tag{9.63}$$

где

$$\mathrm{Pr}_{сл} = \frac{\mu_{сл}}{\rho_{сл}\zeta_{сл}}, \tag{9.64}$$

$A_3, A_4, A_5, m_3, m_4, m_5, m_6$ — константы; $\zeta_{сл}$ — коэффициент температуропроводности.

Для определения параметров в пограничном слое капли в качестве определяющей используется средняя температура $T_{сл} = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$ и среднее давление

$$p_{сл} = \frac{p_1 + p_2}{2}. \tag{9.65}$$

Тогда $\rho_{сл} = \dfrac{p_{сл}}{R_{сл}\, T_{сл}}$, где $R_{сл}$ — газовая постоянная паров смеси газов в пограничном слое.

9.5.4. Уравнение качества процесса. Как правило, процессы, протекающие в двухфазных системах, являются неравновесными и, следовательно, необратимыми. Это соответствует условию

$$dS_{тр} = dS_1 + dS_2 > 0. \tag{9.66}$$

Однако при оценке различных свойств, поведения, особенностей таких систем можно в качестве предельного идеального случая рассматривать двухфазные системы как гомогенные, а

процессы в них считать равновесными. Это соответствует условию

$$dS_{\text{тр}} = dS_1 + dS_2 = 0. \tag{9.67}$$

9.6. Движение одиночной частицы в дисперсионной среде

9.6.1. Движение капель или твердых частиц в газовом потоке. Для практических задач, рассматриваемых в курсе, основной силой, действующей на частицу, является сила аэродинамического сопротивления. Остальные силы по сравнению с ней малы.

Существует три вида сопротивления среды, которые зависят от характера движения тела через среду. *Деформационное*, или *вязкостное* сопротивление — сила деформации среды, необходимая для прохождения в ней тела. Эта деформация может происходить на больших расстояниях от тела впереди и сзади него. Второй вид сопротивления — *сопротивление трения на поверхности тела*; третий вид — *сопротивление давления, обусловленное сжатием среды*. При малых числах Рейнольдса (Re<<1) преобладает деформационное сопротивление.

Сила газодинамического сопротивления, действующая на одну частицу,

$$\vec{R}_{C_{12}} = c_2 \frac{\rho\,(\vec{w}_1 - \vec{w}_2)^2}{2} f_c\,, \tag{9.68}$$

где

$$c_2 = c_x\, \psi\,(\mathrm{We})\, \psi(\varphi)\psi(\mathrm{M}) \tag{9.69}$$

— коэффициент сопротивления, в общем случае зависящий от относительных чисел Re_{12}, We_{12}, числа Маха M_{12} и объемной концентрации φ:

$$\mathrm{Re}_{12} = \frac{\rho_1\,(w_1 - w_2)\,a_2}{\mu_1}\,; \tag{9.70}$$

$$\mathrm{We}_{12} = \frac{a_2\,\rho_1\,(w_1 - w_2)^2}{\sigma_2}\,; \tag{9.71}$$

$$M_{12} = \frac{w_1 - w_2}{a_{зв}}. \qquad (9.72)$$

Здесь μ_1 — коэффициент динамической вязкости газовой фазы; σ_2 — коэффициент поверхностного натяжения фазы капель; $a_{зв}$ — скорость звука газовой фазы.

Число Вебера We_{12} представляет собой отношение сил инерции и сил поверхностного натяжения и учитывает влияние деформации жидких капель. С помощью функции $\psi(\varphi)$ учитывается влияние стесненности части. Для чисел $1 < Re < 10^3$ используется аппроксимирующая зависимость для c_x (см. рис. 9.1):

$$c_x = \frac{A}{Re_{12}} + \frac{B}{\sqrt{Re_{12}}} + C, \qquad (9.73)$$

где $A = 24$, $B = 4$, $C = 0{,}4$.

При $Re_{12} < 1$ используется формула Стокса, соответствующая значениям $B = C = 0$. Для $Re > 10^3$ принимается

$$c_x = 0{,}48. \qquad (9.74)$$

Для $Re_{12} > 1$ и $\varphi_2 \le 0{,}05$

$$\psi(\varphi) = (1 - \varphi_2)^{-2,7}; \qquad (9.75)$$

$$\psi(We) = \exp(0{,}03 We_{12}^{1,5}), \qquad (9.76)$$

где$0 \le We \le 25$;

$$\psi(M) = 1 + \exp\left(-\frac{9{,}427}{M_{12}^{4,63}} - \frac{3{,}0}{Re_{12}^{0,88}}\right). \qquad (9.77)$$

9.6.2. Движение пузырей в жидкости. В зависимости от объема газовые пузыри могут иметь форму сферы, сплюснутого сфероида, сферического сегмента, а в некотором диапазоне размеров начинают пульсировать, изменяя свою форму [45]. Очевидно, что форма пузыря и характер его обтекания между

собой тесно связаны. Несущая среда (жидкость) обозначается индексом 1, дисперсная (пузырьки) — индексом 2.

Если относить основные силы, действующие на пузыри, к единице площади, то: силы инерции $P_w \sim \rho_1 w_{12}^2$; силы тяжести (архимедовы) $P_g \sim g(\rho_1 - \rho_2)\, a_2$; силы вязкости $P_м \sim \mu_1 \dfrac{w_{12}}{a_2}$; силы поверхностного натяжения

$$P_\sigma \sim \frac{\sigma_1}{a_2}. \qquad (9.78)$$

w_{12} — характерная скорость процесса. Из всех четырех сил только сила поверхностного натяжения стремится придать пузырю сферическую форму (условие минимума избыточной свободной энергии границы раздела фаз), а три остальные обеспечивают его деформацию. Отсюда получаются три критерия подобия:

— число Бонда

$$\frac{P_g}{P_\sigma} = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)\, a_2^2}{\sigma_1} = \mathrm{Bo}_{12}; \qquad (9.79)$$

— число Вебера

$$\frac{P_w}{P_\sigma} = \frac{\rho_1\, w^2\, a_2}{\sigma_1} = \mathrm{We}_{12}; \qquad (9.80)$$

— вязкостно-капиллярный критерий

$$\frac{P_\mu}{P_\sigma} = \frac{\mu_1\, w_{12}}{\sigma_1} = \mathrm{N}_{\mu\sigma_{12}}. \qquad (9.81)$$

Тогда условия сферичности пузырька имеют вид

$$\mathrm{Bo}_{12} << 1, \quad \mathrm{We}_{12} << 1, \quad \mathrm{N}_{\mu\sigma_{12}} << 1. \qquad (9.82)$$

Первое условие определяет статическое условие недеформируемости пузырька и существенно для задач гидродинами-

ки. Числа We_{12} и $Nu_{\mu\sigma_{12}}$ определяют динамические условия сферичности. Так как число $Re = P_w/P_\mu$, то в области $Re_{12} > 1$ сферичность пузырька определяется условием $We_{12} << 1$. То же условие, как показывает строгий анализ, справедливо и для $Re_{12} < 1$. Это связано с тем, что при чисто вязкостном обтекании нормальное напряжение одинаково во всех точках поверхности раздела, т. е. оно не деформирует пузырек, а лишь компенсирует избыточное давление в пузырьке, обусловленное кривизной поверхности раздела. При анализе поведения пузырька возможно использование и других критериев, например числа Фруда:

$$Fr = We/Bo. \tag{9.83}$$

В общем случае форма и движение пузырька будут определяться функцией для коэффициента сопротивления

$$c_x = c_x\,(Re_{12},\ Bo_{12},\ We_{12},\ \mu_2/\mu_1,\ \rho_2/\rho_1).$$

На рис. 9.2 показаны формы всплывающего пузырька, соответствующие различным значениям критериев Re_{12}, We_{12},

Рис. 9.2. Формы и характер обтекания пузырьков в жидкости

Bo_{12}. Область *1* чисел $Re_{12} < 1$ соответствует отсутствию сил инерции и сил поверхностного натяжения, при этом сохраняется сферическая форма пузырька. Для этого случая сила сопротивления определяется как

$$P_x = 6\pi a_2 \mu_1 w_{12} \frac{3\mu_2 + 2\mu_1}{3\mu_2 + \mu_1}. \tag{9.84}$$

При $\mu_1 >> \mu_2$ получаем формулу Стокса.

Область *2* $Re_{12} > 1$ соответствует движению сферических пузырьков при $We_{12} << 1$, однако можно полагать пузырьки сферическими до $We_{12} \sim 1$. Коэффициент сопротивления c_x для этой области

$$c_x = \begin{cases} 24\, Re_{12}^{-1} \left(1 + \frac{1}{6} Re_{12}^{2/3}\right) & \text{для} \quad Re_{12} < 15; \\ 48\, Re_{12}^{-1} & \text{для} \quad 15 \le Re_{12} \le 500. \end{cases} \tag{9.85}$$

Область *3* ($Re \sim 300$—500) соответствует движению эллипсоидальных пузырьков при числах $We_{12} \sim 3{,}2 \div 3{,}7$. При больших значениях We_{12} движение пузырьков становится неустойчивым. Выражение для c_x в этой области определяется формулой Мура [45]

$$c_x = \frac{48}{Re_{12}} G(l) \left(1 + \frac{H(l)}{Re_{12}^{1/2}}\right). \tag{9.86}$$

Здесь $G(l)$, $H(l)$ зависят от величины эксцентриситета l (соотношение осей) эллипсоида и числа We_{12}.

Четвертая и пятая области соответствуют сегментации пузырьков, т. е. формированию их в форме сегментов. Это имеет место при числах $Bo_{12} > 1$, $We_{12} > 1$ и $Re_{12} >> 1$, сопровождается пульсациями и дроблением пузырьков.

9.6.3. Скорость витания и трогания частиц. Скорость газа, при которой частица в вертикальном восходящем потоке оказывается неподвижной относительно наблюдателя, называется ***скоростью витания***. Она определяется из условия равновесия сил

лобового сопротивления и тяжести. В частном случае, для $\mathrm{Re} < 1$, используя формулу Стокса $c_x = 24/\mathrm{Re}_{12}$ (9.73), уравнения для силы сопротивления (9.68) и силы тяжести (9.55), получим, что скорость витания

$$w_{\text{вит}} = \rho_2 a_2^2 / 18\mu_1 \,. \tag{9.87}$$

Под ***скоростью трогания*** частицы понимают скорость газа,при которой частица, находящаяся на горизонтальной поверхности, приходит в движение. В одном из двух предельных случаев — в случае ***легкой частицы*** — движение начинается перпендикулярно (вверх) вектору скорости набегающего потока за счет подъемной силы R_y, образующейся при обтекании частицы. Приближенно полагая, что подъемная сила

$$R_y = \pi a_2^2 \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \tag{9.88}$$

уравновешивается силой тяжести

$$R_g = \rho_2 g \frac{\pi a_2^2}{6} \,, \tag{9.89}$$

получаем выражение для скорости трогания

$$w_{\text{тр}} = \sqrt{\frac{\rho_2 a_2 g}{\rho_1}} \,. \tag{9.90}$$

Для тяжелой частицы полагаем, что трогание осуществляется в направлении вектора скорости набегающего потока (горизонтально) за счет преодоления силой сопротивления силы трения покоя частицы. Полагая режим обтекания при трогании стоксовским и приравнивая силу сопротивления силе трения

$$R_{\text{тр}} = fmg = f\rho_2 \frac{\pi a_2^3}{6} g, \tag{9.91}$$

где f — коэффициент трения, получим выражение для скорости трогания

$$w_{тр} = f\rho_2 a_2^2 / 18\mu_1 \ . \tag{9.92}$$

9.6.4. Времена релаксации. Для неоднородных или неравновесных систем важное значение имеет понятие релаксационного процесса. ***Релаксационный процесс*** — это процесс установления равновесия в системе, выведенной внешним воздействием из равновесного состояния. При малом отклонении некоторого параметра n от равновесного значения n_p релаксационный процесс может быть описан уравнением

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_р - n}{\tau_р}, \tag{9.93}$$

решение которого имеет вид

$$\frac{n_р - n}{n_р} = \exp\left(-\frac{1}{\tau_р}\right). \tag{9.94}$$

Величина $\tau_р$, играющая роль некоторого временного масштаба, называется ***временем релаксации*** (рис. 9.3).

Уравнение движения частицы имеет вид

$$m_2 \frac{dw_2}{dt} = c_{x2} \frac{\rho_1 (w_1 - w_2)^2 \pi a_2^2}{8}, \tag{9.95}$$

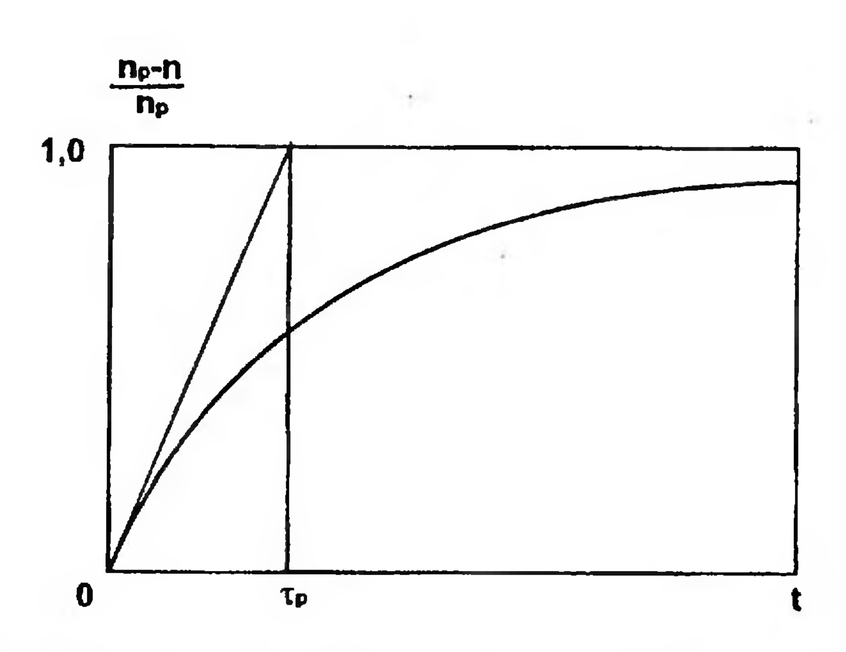


Рис. 9.3. К определению времени релаксации

где

$$m_2 = \pi\rho_2 a_2^3/6, \qquad (9.96)$$

а уравнение теплообмена частицы

$$m_2 c_{p2} \frac{dT}{dt} = \alpha_2 \pi a_2^2 (T_1 - T_2). \qquad (9.97)$$

Здесь α_2 — коэффициент теплоотдачи; c_{p2} — теплоемкость.

Для процессов обмена количеством движения и энергией (в форме тепла) из уравнений (9.95) и (9.96) следуют выражения для времени динамической релаксации τ_w и тепловой релаксации τ_T:

$$\tau_w = \frac{\rho_2 a_2^2}{18\mu_1}; \qquad (9.98)$$

$$\tau_T = \frac{a_2 \rho_2 c_{p2}}{6\alpha_2}. \qquad (9.99)$$

Используя формулу для коэффициента теплоотдачи (9.42) и числа Прандтля (9.64), можно сравнить эти времена:

$$\frac{\tau_w}{\tau_T} = \frac{1}{3} \frac{\mathrm{Nu}_1\, c_{p1}}{\mathrm{Pr}_1\, c_{p2}}. \qquad (9.100)$$

Из последней формулы следует, что эти времена релаксации могут различаться и в таком случае течение будет неравновесным.

9.7. Равновесная (гомогенная) система двух фаз

Систему двух фаз будем называть *равновесной*, если температуры, скорости и давления фаз совпадают, а температура и давление связаны уравнением фазового равновесия. Тогда

$$T_1 = T_2 = T, \quad w_1 = w_2 = w, \quad p_1 = p_2 = p, \; p = p(T). \qquad (9.101)$$

В этом случае поведение системы может быть описано системой уравнений, аналогичных однофазной среде. Такая система

называется ***псевдогазом*** или ***фиктивным газом.*** Уравнения, выражающие законы сохранения, не будут зависеть от вида системы (аэрозольная или пузырьковая). Отличие будет проявляться в определяющих уравнениях. Рассмотрим систему, состоящую из сжимаемого газа и несжимаемой жидкости, определяющие уравнения которых имеют вид

$$p_1 = \rho_1 R_1 T_1\ ; \tag{9.102}$$

$$\rho_2 = \text{const}\ . \tag{9.103}$$

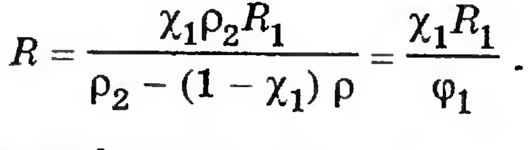
Используя (9.1) и (9.8) для плотности ρ системы, получим выражение для

$$\rho_1 = \frac{\chi_1 \rho_2 \rho}{\rho_2 - (1 - \chi_1)\,\rho}\ . \tag{9.104}$$

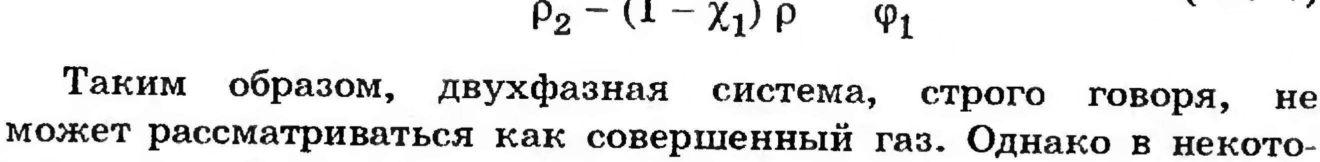
Подставим последнее в (9.102) и представим уравнение состояния двухфазной системы в виде

$$p = \rho R T, \tag{9.105}$$

где



$$R = \frac{\chi_1 \rho_2 R_1}{\rho_2 - (1 - \chi_1)\,\rho} = \frac{\chi_1 R_1}{\varphi_1}\ . \tag{9.106}$$



Таким образом, двухфазная система, строго говоря, не может рассматриваться как совершенный газ. Однако в некоторых частных случаях такое приближение возможно.

Приближение слабоконцентрированной аэрозольной системы соответствует условиям

$$\varphi_2 << 1, \quad \varphi_1 \sim 1. \tag{9.107}$$

Тогда уравнение (9.106) для газовой постоянной системы будет иметь вид

$$R = \chi_1\, R_1\ . \tag{9.108}$$

Если в такой системе отсутствуют фазовые переходы, т. е. $\chi_1 = \text{const}$, то она приближенно может рассматриваться как совершенный (фиктивный) газ с теплоемкостью

$$C_p = C_{p_1}\chi_1 + c_2\chi_2 \tag{9.109}$$

и показателем адиабаты

$$n = \frac{C_p + R}{C_p} = \frac{\chi_1 (C_{p1} + R_1) + \chi_2 c_2}{\chi_1 C_{p1} + \chi_2 c_2}. \tag{9.110}$$

Такая модель хорошо описывает поведение газа с мелкодисперсными частицами (твердыми или жидкими) порядка микрона.

Приближение газожидкостной пузырьковой системы соответствует условиям, при которых можно пренебречь массовым содержанием газовой фазы, так что $\chi_1 << 1$, $\chi_2 \sim 1$ и $\rho_2 >> \rho_1$ (невысокое давление), причем

$$\varphi_2 > \varphi_1 . \tag{9.111}$$

В этом случае, в соответствии с (9.106), величина R оказывается переменной и обычно используется *изотермическое приближение* [48], при этом полагают, что

$$RT = b = \text{const} . \tag{9.112}$$

Кроме этого, из (9.8) с учетом (9.11) следует, что

$$\rho \sim \rho_2\varphi_2 . \tag{9.113}$$

9.8. Скорость звука в двухфазных системах

Скорость звука является важнейшей характеристикой системы, определяющей качество скоростного режима течения: дозвуковой или сверхзвуковой. В упругой среде она определяется (2.96) как $a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}$. Частная производная вычисляется при постоянной энтропии, что эквивалентно предположению об отсутствии в звуковой волне тепломассообмена с окружающей средой и процессов диссипации энергии, независимо от состояния системы в целом. Эти условия определяют независимость скорости распространения волны от частоты возмущения (отсутствие *дисперсии*) в широком диапазоне частот и отсутствие *за-*

тухания. Даже в однофазных системах расширения и сжатия в волне происходят изоэнтропийно лишь при малых амплитудах и не слишком больших частотах волн. При отклонении от этих условий начинаются явления диссипации энергии, т. е. переход энергии движения волны в энергию теплового движения молекул, остающихся за ее фронтом.

В двухфазных системах даже при отсутствии тепломассобмена с окружающей средой процесс расширения—сжатия в звуковой волне может отличаться от изоэнтропийного за счет процессов межфазного взаимодействия: обмена массой, количеством движения и энергией в форме тепла. Если эти процессы обмена протекают неравновесно, то происходит диссипация энергии. Неравновесность процессов межфазного взаимодействия проявится в появлении сдвига между волнами давления, плотности и температуры фаз, и реализуется в сдвиге по фазе (по времени) между скоростями, температурами фаз и процессами фазовых переходов.

9.8.1. Равновесная скорость звука. Равновесная скорость звука $a_{зв}$ соответствует равновесным процессам межфазного взаимодействия в процессе распространения волны. Рассмотрим адиабатическое и изотермическое приближения для вычисления равновесной скорости звука.

Адиабатическое приближение для аэрозольной системы при $\chi_1 = \text{const}$. Используем метод политропы для модели фиктивного газа

$$a^2_{зв\,1-2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = n\frac{p}{\rho} = nRT = n\frac{\chi_1 R_1 T}{\varphi_1} = k_1 R_1 T\,\frac{n\chi_1}{k_1\varphi_1}. \tag{9.114}$$

Здесь

$$k_1 R_1 T = a_1^2 \tag{9.115}$$

— скорость звука в газовой фазе двухфазной системы.

Изотерическое приближение для пузырьковой системы при условиях (9.111). С учетом (9.112) и (9.113) имеем

$$\frac{p\varphi_1}{\rho} = \text{const}. \tag{9.116}$$

Дифференцируя выражение (9.8) для плотности ρ по давлению и используя выражение (2.96) применительно к скорости звука в каждой из фаз, получаем следующее приближение для скорости звука в пузырьковой системе [48]:

$$a^2_{\text{зв } 2-1} = \frac{p}{\rho_2 \varphi_2 \varphi_1} = \frac{\rho_1 k_1 R_1 T}{\rho_2 \varphi_2 \varphi_1}. \tag{9.117}$$

Полученное выражение соответствует случаю течения двухфазного потока пузырьковой структуры с мелкими пузырьками газа. Формулы (9.114) и (9.117) показывают, что равновесная скорость звука в двухфазной среде может быть существенно ниже, чем в любой из фаз. На рис. 9.4 показаны результаты расчета скорости звука в двухфазной системе в зависимости от объемной концентрации газовой фазы φ_1 [48]. Сплошная линия соответствует адиабатическому приближению,пунктирная — изотермическому приближению. Экспериментальные точки соответствуют водовоздушной пузырьковой системе.

В реальных двухфазных системах, для которых принятые допущения не выполняются, скорость звука начинает зависеть от амплитудно-частотных характеристик, определяемых тепло-

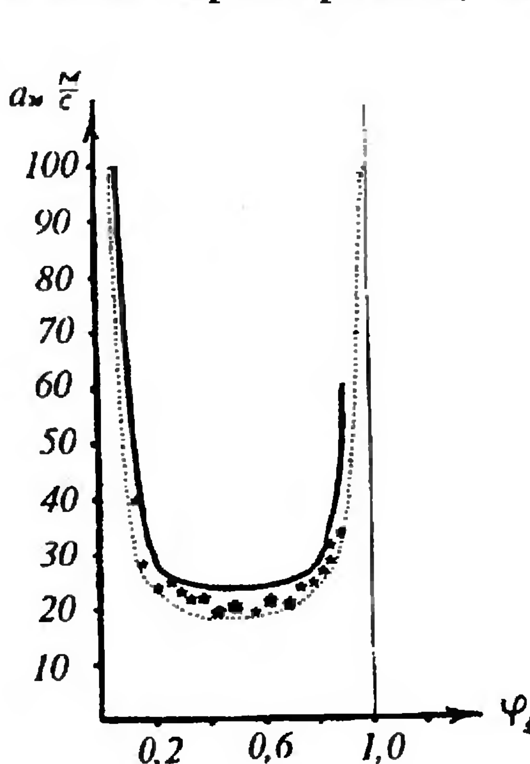


Рис. 9.4. Скорость звука в пузырьковой водовоздушной смеси при атмосферных условиях

физическими свойствами фаз, структурой системы, геометрией фаз (форма, размеры) [43, 44, 46, 48].

9.9. Скачки уплотнения

Рассмотрим соотношения для расчета скачков уплотнения в рассмотренных ранее двухфазных системах: аэрозольной и пузырьковой.

9.9.1. Аэрозольная система. Как было показано выше, при условиях (9.107) поведение рассматриваемой системы может быть описано уравнениями псевдогаза, или фиктивного газа, аналогичными уравнениям для однофазных течений с теплофизическими характеристиками R, $C_р$, n, определяемыми соотношениями (9.108)—(9.110). Вводя температуру торможения для системы

$$T^* = T + w^2/2C_р \tag{9.118}$$

и критическую скорость звука

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2n}{n+1} RT^*}\ , \tag{9.119}$$

приведенную скорость

$$\lambda = w/a_{кр}\ , \tag{9.120}$$

можно воспользоваться всем математическим аппаратом для расчета скачков уплотнения, изложенным выше для однофазных течений. В частности, справедливо основное кинематическое соотношение для прямого скачка

$$\lambda_н \lambda_1 = 1$$

(где индекс "н" соответствует параметрам до скачка, а индекс "1" — параметрам после скачка), а также все соотношения для газодинамических функций.

9.9.2. Пузырьковая система. Пузырьковую систему рассмотрим для случая выполнения условий (9.111). Тогда можно воспользоваться изотермическим приближением, в частности, ус-

ловием $RT = b = \text{const}$ (9.112), с учетом которого уравнение состояния запишется как

$$p = b\rho. \tag{9.121}$$

Используя (9.116), (9.117) и (9.121), запишем выражение для скорости звука в пузырьковой системе

$$a_{\text{зв } 2-1} = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{1}{b}} \; . \tag{9.122}$$

Введем число Маха пузырьковой системы:

$$\mathrm{M} = w / a_{\text{зв } 2-1} \; . \tag{9.123}$$

Обозначая параметры до скачка индексом “н”, после скачка — индексом “1”, запишем систему уравнений для расчета скачка:

неразрывности

$$\rho_{\text{н}} w_{\text{н}} = \rho_1 w_1 \; ; \tag{9.124}$$

количества движения

$$p_{\text{н}} - p_1 = \rho_1 w_1^2 - \rho_{\text{н}} w_{\text{н}}^2 \; ; \tag{9.125}$$

состояния

$$p_{\text{н}} = b\rho_{\text{н}} \;\; \text{и} \;\; p_1 = b\rho_1 \; . \tag{9.126}$$

Преобразуя систему уравнений модели пузырькового течения (9.124)—(9.120), получим

$$\mathrm{M}_{\text{н}}\mathrm{M}_1 = 1; \tag{9.127}$$

$$p_1 = p_{\text{н}}\mathrm{M}_{\text{н}}^2. \tag{9.128}$$

9.9.3. Особенности скачков в двухфазных системах. При течении газа с частицами наблюдается два типа скачков уплотнения, определяемых параметрами скоростного режима течения — числами Маха. Скорость звука в газовой фазе a_1 называют ***замороженной скоростью звука***, поскольку она соответствует

случаю отсутствия взаимодействия между фазами двухфазного потока. Введем число Маха $M_{зам}$ по замороженной скорости звука:

$$M_{зам} = w/a_1 \, . \tag{9.129}$$

Другим критерием скоростного режима двухфазной системы является число Маха M_{1-2}, определяемое по скорости звука в двухфазной системе

$$M_{1-2} = w/a_{зв\,1-2}. \tag{9.130}$$

Если $M_{зам} > 1$, то возникает ***"сильный" скачок уплотнения***, в котором газовая фаза ведет себя как в однофазном потоке. Однако за скачком образуется ***зона релаксации***, в которой газ и частицы приходят в состояние равновесия. При переходе через фронт скачка частицы не успевают изменить свои параметры (вследствие инерционности), а газовая фаза изменяет свои параметры при переходе через фронт скачка. Поэтому, если система до скачка была равновесной, то после скачка она всегда становится неравновесной. Схема сильного скачка уплотнения показана на рис. 9.5. Параметры перед скачком обозначены индексом "н", за скачком — индексом "1", конечное состояние — индексом "2", газовая фаза — индексом "г", фаза частиц — индексом "к". В зоне релаксации сразу за зоной соб-

Рис. 9.5. "Сильный" скачок уплотнения с зоной релаксации

ственно скачка возможно кратковременное увеличение скорости газовой фазы, так как скорость частиц за фронтом скачка оказывается больше. Характер изменения скорости газа будет определяться дисперностью (размером) частиц и их концентрацией.

Если $M_{зам} < 1$, а $M_{1-2} > 1$, то возникает "***слабый скачок уплотнения***", характеризующийся плавным изменением параметров без разрыва непрерывности параметров. Схема слабого скачка показана на рис. 9.6. Обозначения параметров аналогичны рис. 9.5. Для пузырьковых течений характерна промежуточная схема реализации скачка с широкой зоной фронта скачка и менее протяженной зоной релаксации [49].

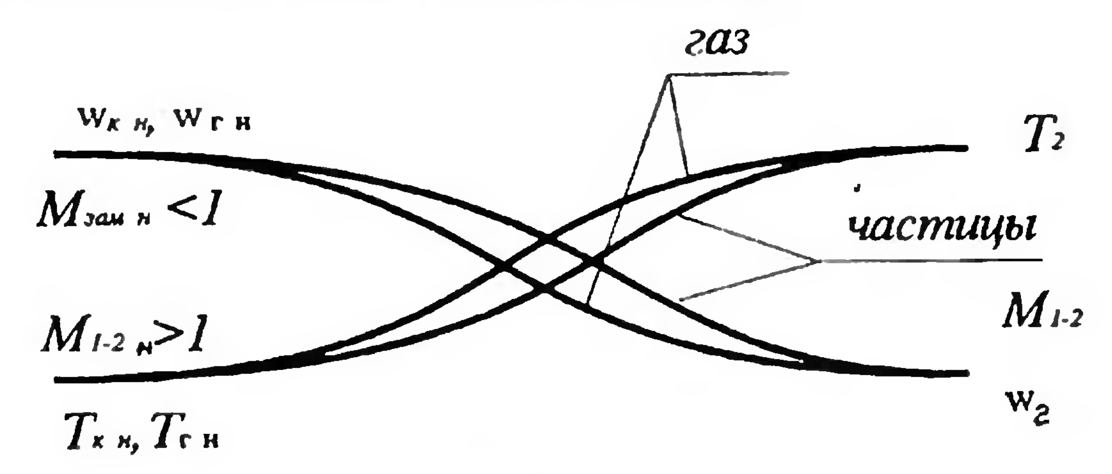


Рис. 9.6. "Слабый" скачок уплотнения

Приложение 1

Международная стандартная атмосфера (МСА)

Высота от уровня океана H,км	Температура T,К	Давление p,Па	Плотность q,кг/м³	Вязкость $\mu\cdot10^5$,Н·с/м²	Длина свободного пробега молекул l,м
0	288,2	101 330	1,23	1,79	$6{,}9\cdot10^{-8}$
1	281,7	89 880	1,11	1,76	
2	275,1	79 490	1,01	1,73	
3	268,6	70 130	$9{,}09\cdot10^{-1}$	1,69	
4	262,1	61 660	$8{,}19\cdot10^{-1}$	1,66	
5	255,6	54 050	$7{,}37\cdot10^{-1}$	1,63	
6	249,1	49 210	$6{,}60\cdot10^{-1}$	1,60	
7	242,6	41 090	$5{,}90\cdot10^{-1}$	1,56	
8	236,1	35 650	$5{,}26\cdot10^{-1}$	1,53	
9	229,6	30 790	$4{,}67\cdot10^{-1}$	1,49	
10	223,2	26 490	$4{,}14\cdot10^{-1}$	1,46	$2{,}1\cdot10^{-7}$
11	216,7	22 690	$3{,}65\cdot10^{-1}$	1,42	
15	216,7	12 110	$1{,}95\cdot10^{-1}$	1,42	
20	216,7	5 530	$8{,}89\cdot10^{-2}$	1,42	$9{,}7\cdot10^{-7}$
25	216,7	2 530	$4{,}06\cdot10^{-2}$	1,42	$2{,}2\cdot10^{-6}$
30	230,4	1 200	$1{,}79\cdot10^{-2}$	1,49	$4{,}8\cdot10^{-6}$
35	244,9	500,2	$6{,}76\cdot10^{-3}$	1,89	
40	257,7	296	$4{,}00\cdot10^{-3}$	1,57	$2{,}2\cdot10^{-5}$
50	274,0	84.6	$1{,}08\cdot10^{-3}$	1,72	$7{,}8\cdot10^{-5}$
60	253,4	44,1	$3{,}32\cdot10^{-4}$	1,62	$2{,}6\cdot10^{-4}$
70	219,2	5,8	$9{,}27\cdot10^{-5}$	1,44	$9{,}3\cdot10^{-4}$
80	185,0	1,11	$2{,}09\cdot10^{-5}$	1,24	$4{,}3\cdot10^{-3}$
90	185,0	0,18	$3{,}47\cdot10^{-6}$	1,24	$2{,}1\cdot10^{-2}$
100	209,2	0,03	$5{,}39\cdot10^{-7}$	1,39	$9{,}5\cdot10^{-2}$
120	446,2	$3{,}01\cdot10^{-3}$	$2{,}33\cdot10^{-8}$		1,3
200	1536,4	$2{,}00\cdot10^{-4}$	$4{,}43\cdot10^{-10}$		300,0

Таблица газодинамических функций (k=1,4)

λ	τ	π	ε	q	y	f	r	M	Z
0	1,000	1,0000	1,0000	0.000	0,000	1,000	1,000	1,000	∞
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0.0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457	20,0500
0.10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0058	1,9885	0,0914	10,1000
0.15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,2375	1.0129	0,9744	0,1372	6,8167
0.20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830	5,2000
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290	4,2500
0.30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	1,0496	0,9037	0,2760	3.6336
0.35	0.9796	0.9303	0,9497	0.5263	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228	3.2071
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701	2,9000
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179	2,6722
0.50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663	2,5000
0,55	0,9496	0.8344	0.8787	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152	2,3682
0,60	0,9400	0,8053	0.8567	0,8169	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649	2,2667
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8563	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154	2,1885
0.70	0,9183	0.7422	0,8082	0.8924	1,2024	0.2042	0,6163	0,6668	2,1286
0,75	0,9063	0.7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192	2,0833
0.80	0,8933	0,6738	0.7563	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727	2,0500
0,85	0,8796	0.6382	0.7256	0.9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274	2.0265
0,90	0.8650	0,6019	0,6959	0.9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833	2.0111
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4466	0.9409	2.0026
1,00	0,8333	0.5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0.4167	1.0000	2.0000
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0.3882	1.0609	2.0024
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239	2.0091
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1.1890	2.0196
1,20	0.7600	0.3827	0,5035	0,9531	2,4906	1,2286	0.3115	1,2566	2.0333

1,25	0,7396	0,3479	0.4704	0.9275	2,6660	1,2054	0.2886	1.3268	2.0500
1,30	0,7183	0,3142	0.4374	0.8969	2,8547	1,1765	0,2670	1.4002	2.0692
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3.0586	1,1417	0.2467	1,4769	2.0907
1,40	0,6733	0,2505	0.3720	0,8216	3,2798	1.1012	0,2275	1,5575	2.1143
1,45	0,6496	0,2209	0.3401	0,7778	3,5211	1,0551	0.2094	1,6423	2,1397
1,50	0,6250	0,1930	0.3088	0,7307	3,7858	1,0037	0.1923	1.7321	2.1667
1,55	0,5996	0.1669	0,2784	0.6807	4,0778	0.9472	0.1762	1,8273	2,1952
1,60	0,5733	0,1427	0.2489	0,6282	4.4020	0,8861	0,1611	1,9290	2.2250
1.65	0,5463	0,1205	0.2205	0.5740	4,7647	0.8210	0,1467	2,0380	2,2561
1,70	0.5183	0,1003	0,1934	0.5187	5,1735	0.7524	0,1333	2,1555	2.2882
1,75	0,4896	0,0821	0.1677	0,4630	5,6383	0,6813	0.1205	2,2831	2.2314
1,80	0.4600	0.0660	0.1435	0,4075	6.1723	0.6085	0.1085	2.4227	2,3556
1,85	0,4296	0,0520	0.1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2.5766	2,3905
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0.3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481	2,4263
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0763	2.9414	2.4628
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9.4641	0,3203	0,0668	3.1622	2.5000
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3.4190	2.5378
2,10	0,2650	0,0096	0.0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0490	3,7240	2.5762
2,15	0,2296	0,0058	0.0253	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961	2,6151
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674	2,6545
2,25	0,1563	0,0015	0,0097	0,0343	22,712	0,0589	0,0258	5.1958	2,6944
2,30	0,1183	0,0006	0,0048	0,0175	30.658	0,0302	0.0189	6,1033	2,7348
2,35	0,0796	0,0001	0,0017	0,0063	46,593	0.0111	0,0122	7,6053	2,7755
2,40	0,0400	$0{,}13\cdot10^{-4}$	0.0003	0,0012	94.703	0,0022	0,0059	10,957	2,8167
2,45	0	0	0	0	∞	0	0	∞	2,8581

Таблица для расчета течения Прандтля-Майера (k=1,4)

δ	φ	M	λ	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$\tau(\lambda)$	α^0_0	r/r_0
0°00′	0°00′	1,000	1,000	0,528	0,634	0,833	90°00′	1
0°30′	18°24′	1,051	1,042	0,497	0,607	0,819	72°06′	1,049
1°00′	23°32′	1,083	1,067	0,479	0,591	0,810	67°28′	1,087
2°00′	30°00′	1,133	1,107	0,450	0,565	0,796	62°00′	1,147
3°00′	34°54′	1,178	1,142	0,424	0,542	0,783	58°06′	1,205
4°00′	38°52′	1,219	1,172	0,402	0,522	0,771	55°08′	1,262
6°	45°24′	1,294	1,227	0,364	0,497	0,749	50°36′	1,372
8°	51°00′	1,367	1,277	0,330	0,452	0,728	47°00′	1,498
10°	55°50′	1,435	1,323	0,299	0,422	0,708	44°10′	1,626
12°	60°20′	1,504	1,367	0,271	0,393	0,688	41°40′	1,772
14°	64°25′	1,569	1,408	0,246	0,367	0,670	39°35′	1,923
16°	68°24′	1,639	1,448	0,222	0,341	0,650	37°36′	2,094
18°	72°06′	1,705	1,486	0,201	0,318	0,632	35°54′	2,291
20°	75°42′	1,775	1,523	0,181	0,295	0,613	34°18′	2,500
22°	79°12′	1,846	1,559	0,162	0,273	0,595	32°48′	2,735
24°	82°30′	1,914	1,594	0,146	0,253	0,576	31°30′	2,993
26°	85°48′	1,988	1,628	0,130	0,233	0,558	30°12′	3,319
28°	89°00′	2,063	1,660	0,116	0,215	0,541	29°00′	3,647
30°	92°00′	2,130	1,691	0,1040	0,198	0,523	28°00′	4,046
32°	95°05′	2,209	1,722	0,0920	0,182	0,506	26°55′	4,436

34°	98°03′	2,285	1,752	0,0814	0,167	0,488	25°57′	4,955
36°	101°00′	2,336	1,782	0,0717	0,152	0,471	25°00′	5,521
38°	103°57′	2,454	1,810	0,0630	0,139	0,454	24°03′	6,166
40°	106°48′	2,539	1,838	0,0552	0,126	0,437	23°12′	6,919
42°	109°36′	2,624	1,865	0,0481	0,114	0,420	22°24′	7,798
44°	112°21′	2,717	1,891	0,0419	0,104	0,404	21°36′	8,710
46°	115°12′	2,816	1,918	0,0360	0,093	0,387	20°48′	9,954
48°	117°54′	2,910	1,943	0,0310	0,084	0,371	20°06′	11,20
50°	120°36′	3,010	1,967	0,0267	0,075	0,355	19°24′	12,94
52°	123°18′	3,119	1,990	0,0229	0,067	0,340	18°42′	14,72
54°	126°00′	3,236	2,014	0,0194	0,060	0,324	18°00′	16,90
56°	128°36′	3,344	2,036	0,0164	0,053	0,309	17°24′	19,49
58°	131°15′	3,470	2,058	0,0138	0,047	0,294	16°45′	22,49
60°	133°54′	3,606	2,080	0,0115	0,041	0,279	16°06′	26,30
62°	136°30′	3,742	2,100	$0,9541 \cdot 10^{-2}$	0,036	0,265	15°30′	30,55
64°	139°03′	3,876	2,121	$0,784 \cdot 10^{-2}$	0,031	0,250	14°57′	36,40
66°	141°36′	4,021	2,140	$0,645 \cdot 10^{-2}$	0,027	0,237	14°24′	43,15
68°	144°12′	4,193	2,159	$0,525 \cdot 10^{-2}$	0,0253	0,223	13°48′	51,62
70°	146°42′	4,348	2,177	$0,426 \cdot 10^{-2}$	0,0203	0,210	13°18′	62,50
72°	149°12′	4,515	2,195	$0,339 \cdot 10^{-2}$	0,0172	0,197	12°48′	75,00
74°	151°42′	4,695	2,212	$0,270 \cdot 10^{-2}$	0,0146	0,184	12°18′	91,20

δ	φ	M	λ	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$\tau(\lambda)$	α^0_0	r/r_0
76^0	$154^0 15'$	4,912	2,228	$0,214 \cdot 10^{-2}$	0,0124	0,173	$11^0 45'$	111,7
78^0	$156^0 45'$	5,126	2,244	$0,165 \cdot 10^{-2}$	0,0103	0,160	$11^0 15'$	143,3
80^0	$159^0 15'$	5,362	2,260	$0,126 \cdot 10^{-2}$	$0,851 \cdot 10^{-2}$	0,149	$10^0 45'$	177,0
82^0	$161^0 42'$	5,593	2,274	$0,971 \cdot 10^{-3}$	$0,705 \cdot 10^{-2}$	0,138	$10^0 18'$	219,8
84^0	$164^0 12'$	5,875	2,289	$0,722 \cdot 10^{-3}$	$0,570 \cdot 10^{-2}$	0,127	$9^0 48'$	279,3
86^0	$166^0 42'$	6,188	2,302	$0,545 \cdot 10^{-3}$	$0,466 \cdot 10^{-2}$	0,117	$9^0 18'$	361,0
88^0	$169^0 06'$	6,464	2,315	$0,398 \cdot 10^{-3}$	$0,373 \cdot 10^{-2}$	0,107	$8^0 54'$	466,0
90^0	$171^0 36'$	6,845	2,328	$0,285 \cdot 10^{-3}$	$0,294 \cdot 10^{-2}$	0,097	$8^0 24'$	631,0
92^0	$174^0 00'$	7,184	2,340	$0,197 \cdot 10^{-3}$	$0,226 \cdot 10^{-2}$	0,087	$8^0 00'$	841,2
94^0	$176^0 27'$	7,610	2,350	$0,139 \cdot 10^{-3}$	$0,176 \cdot 10^{-2}$	0,079	$7^0 33'$	1135
96^0	$178^0 54'$	8,091	2,361	$0,954 \cdot 10^{-4}$	$0,134 \cdot 10^{-2}$	0,071	$7^0 06'$	1478
98^0	$181^0 21'$	8,636	2,371	$0,628 \cdot 10^{-4}$	$0,996 \cdot 10^{-3}$	0,063	$6^0 19'$	2240
100^0	$183^0 48'$	9,259	2,380	$0,403 \cdot 10^{-4}$	$0,726 \cdot 10^{-3}$	0,055	$6^0 12'$	3092
102^0	$186^0 12'$	9,891	2,389	$0,257 \cdot 10^{-4}$	$0,526 \cdot 10^{-3}$	0,049	$5^0 48'$	4730
104^0	$188^0 36'$	10,626	2,397	$0,156 \cdot 10^{-4}$	$0,368 \cdot 10^{-3}$	0,042	$5^0 24'$	7440
$130^0 27$	$220^0 27'$	∞	2,449	0	0	0	$0^0 00'$	∞

Приложение 4

Таблица переводных множителей для расчета размерных величин [22]

Наименование	Обозначение	МКГСС	Размерность Си	Внесистемная	Множитель для перевода
Давление	*p*	кг/м^2	Па=Н/м^2	мм рт. ст., бар	1 мм рт.ст=13.6мм вод.ст 1 кг/м^2=1мм вод. ст.=9,807 Н/м^2 1 бар=10^5 Н/м
Напряжение	τ	кг/м^2	Н/м^2	-	1 кг/м^2=9,807 Н/м^2
Плотность	ρ	кг·с^2/м^4	кг/м^3	-	1 кг·с^2/м^4=9,807 кг/м^3
Сила,тяга	*R*	кг	Н	-	1 кг=9,807 Н
Работа, энергия удельная	*L, E*	кг·м/кг	Дж/кг=м^2/с^2	-	1 кг ·м/кг=9,807Дж/кг
Мощность	*N*	кг·м/с	Вт	л.с., кВт	1 кг·м/с=9,807Вт 1 л. с=0,7355кВт
Газовая постоянная	*R*	кг·м/(кг·К)	Дж/(кг·К)	-	1 кг·м/кг К=9,807Дж/(кг·К)
Количество тепла	*Q*	ккал	Дж	-	1 ккал=4187Дж
Удельное количество тепла	*q*	ккал/кг	Дж/кг	-	1 ккал/кг=4187Дж/кг
Энтальпия (теплосодержание)	*I*	ккал/кг	Дж/кг	-	1 ккал/кг=4187Дж/кг
Удельная теплоёмкость	C_p, C_v	ккал/(кг·К)	Дж/(кг·К)	-	1 ккал/(кг·К)= 4187Дж/(кг·К)

Температура	*T*	К	К	°С	-
Термический эквивалент работы	*A*	1/427 ккал/кг	-	-	-
Весовой расход	*G*	кг/с	-	-	-
Расход (массовый)	*G, m*	кг·с/м	кг/с	-	1 кг·с/м=9.807 кг/с
Угол скачка характеристики скоса потока	α	град	рад	-	1°=0,01746 рад
Частота вращения	*n*	об/мин	1/с	-	1 об/мин=16,7·10⁻³ 1/с
Динамический коэффициент вязкости	μ	кг·с/м²	Н·с/м²	Пуаз	1 кг·с/м²=9,807 Н с/м²
Кинематический коэффициент вязкости	ν	м²/с	м²/с	Стокс	1 ст=10⁻⁴ м²/с

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Флейшман Б.С.* Основы системологии. — М.: Радио и связь, 1982. — 368 с.

2. *Сергель О.С.* Прикладная гидрогазодинамика. — М.: Машиностроение, 1981. — 374 с.

3. *Кинан Дж.* Термодинамика. — М.-Л.: ГЭИ, 1963. — 280 с.

4. *Вукалович М.П., Новиков И.И.* Техническая термодинамика. — М.: Энергия, 1968. — 496 с.

5. *Шаргут Я., Петела Р.* Эксергия. — М.: Энергия, 1968. — 279 с.

6. *Бондарев Е.Н., Дубасов В.Г., Рыжов Ю.А.* и др. Аэрогидромеханика. — М.: Машиностроение, 1993. — 608 с.

7. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1 и 2. — 1200 с.

8. *Борисенко А.И.* Газовая динамика двигателей. — М.: Оборонгиз, 1962. — 793 с.

9. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. — М.: Наука, 1991. Ч. 1 и 2. — 900 с.

10. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. — М.: ИЛ, 1949. — 520 с.

11. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. — М.: ИЛ, 1963. — 702 с.

12. *Шорин С.Н.* Теплопередача. — М.: Высшая школа, 1964. — 490 с.

13. *Рахматулин Х.А., Сагомонян А.Я., Бунимович А.И.* и др. Газовая динамика. — М.: Высшая школа, 1965. — 720 с.

14. *Петров Н., Бранков Й.* Современные проблемы термодинамики. — М.: Мир, 1986. — 285 с.

15. *Бай Ши-и.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. — М.: ИЛ, 1962. — 410 с.

16. *Вейник А.И.* Термодинамика. — Мн.: Вышейша школа, 1968. — 463 с.

17. *Вейник А.И.* Термодинамика необратимых процессов. — Мн.: Наука и техника, 1966. — 360 с.

18. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964. — 329 с.

19. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. — М.: ИЛ, 1960. — 357 с.

20. *Вейник А.И.* Термодинамика реальных процессов. — Мн.: Наука и техника, 1991. — 576 с.

21. *Onsager L.* Reciprocal Relations in Irreversible Proceses. — Physical Review. Vol 37, 405; vol 38, 2265—1931.

22. *Степчков А.А.* Задачник по прикладной гидрогазовой динамике. — М.: МАИ, 1974. — 209 с.

23. *Степчков А.А.* Задачник по гидрогазовой динамике. — М.: Машиностроение, 1980. — 182 с.

24. *Иров Ю.Д.* Газодинамические функции. — М.: Машиностроение, 1965.

25. *Дейч М.Е., Зарянкин А.Е.* Гидрогазодинамика. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 384 с.

26. *Вулис Л.А.* Термодинамика газовых потоков. — М.: ГЭИ, 1950. — 304 с.

27. *Черный Г.Г.* Газовая динамика. — М.: Наука, 1988. — 424 с.

28. *Липман Г.В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. — М.: ИЛ, 1960. — 518 с.

29. *Самойлович Г.С.* Гидрогазодинамика. — М.: Машиностроение, 1990. — 384 с.

30. *Зауэр Р.* Введение в газовую динамику. — М.: ОГИЗ, 1947. — 87 с.

31. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Механика. — М.: Наука, 1971. — 479 с.

32. *Иноземцев Н.В., Зуев В.С.* Авиационные газотурбинные двигатели. — М.: ГИОБОРОНПРОМ, 1949. — 457 с.

33. *Пирумов У.Г.* Обратная задача теории сопла. — М.: Машиностроение, 1988. — 240 с.

34. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.* Газовая динамика сопел. — М.: Наука, 1990. — 308 с.

35. *Бонни Э.А., Зукроу М. Дж., Бессерер К.У.* Аэродинамика. Реактивные двигатели. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 672 с.

36. *Зуев В.С., Макарон В.С.* Теория прямоточных и ракетно-прямоточных двигателей. — М.: Машиностроение, 1971. — 367 с.

37. *Герман Р.* Сверхзвуковые входные диффузоры. — М.: Физматгиз, 1960. — 270 с.

38. *Патрашев А.Н.* Гидромеханика. — М.: Военмориздат, 1950. — 719 с.

39. *Альтшуль А.Д., Киселев П.Г.* Гидравлика и аэромеханика. — М.: Стройиздат, 1965. — 274 с.

40. *Петунин А.Е.* Методы и техника измерений параметров газового потока. — М.: Машиностроение, 1972. — 372 с.

41. *Петунин А.Е.* Измерение параметров газового потока. — М.: Машиностроение, 1974. — 260 с.

42. *Дуранин Т., Грейтид К.* Лазерные системы в гидродинамических измерениях. — М.: Энергия, 1980. — 336 с.

43. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — 464 с.

44. *Дейч М.Е., Филиппов Г.А.* Газодинамика двухфазных сред. — М.: Энергоиздат, 1981. — 471 с.

45. *Лабунцов Д.А., Ягов В.В.* Механика простых газожидкостных структур. — М.: МЭИ, 1978. — 92 с.

46. *Соу С.* Гидродинамика многофазных систем. — М.: Мир, 1971. — 536 с.

47. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 668 с.

48. *Уоллис Г.* Одномерные двухфазные течения. — М.: Мир, 1972. — 440 с.

49. *Васильев Ю.Н., Гладков Е.П.* Экспериментальное исследование вакуумного водовоздушного эжектора с многоствольным соплом // Лопаточные машины и струйные аппараты. Вып. 5. — М.: Машиностроение, 1971. С. 262—306.

50. *Франк-Каменецкий Д.А.* Теплопроводность и диффузия в химической кинетике. — М.: АН СССР, 1947. — 157 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тем. план 2000, поз. 1

ЛЕПЕШИНСКИЙ Игорь Александрович

ГАЗОДИНАМИКА ОДНО- И ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ
В РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Редактор *М.С. Винниченко*
Компьютерная верстка *О.Г. Лавровой*

Сдано в набор 20.11.01. Подписано в печать 7.10.03.
Бумага газетная. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 16,04. Уч.-изд.л. 17,25.
Тираж 1000. Зак. 2543/1389. С. 88.

Издательство МАИ
"МАИ", Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
"МАИ", Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993